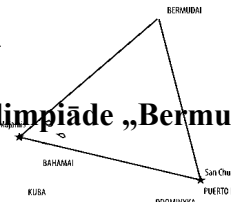


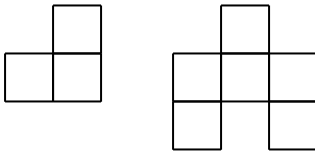
Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”



Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

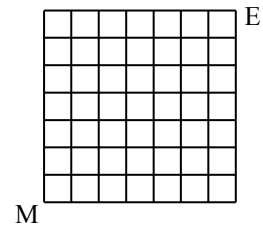
Uzdevumi 7. klasei

1. Doti 5 skaitļi. Katru divu skaitļu summa ir lielāka par 4. Pierādīt, ka visu piecu skaitļu summa ir lielāka par 10.
2. Vai no dotajām figūrām var salikt a) 8×8 ; b) 9×9 rūtiņu tīklu, katru no tām izmantojot vismaz vienu reizi (figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties).



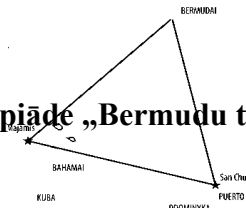
3. Skolā mācās 2007 skolēni. Ir skolēni, kuri pazīst viens otru, ir arī tādi, kuri nav pazīstami. (Visas pazīšanās ir abpusējas.) Vai skolā noteikti ir tāds skolēns, kurš pazīst pāra skaitu citu skolēnu?
4. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atviegojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1,3,5,7,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2,4,6,8,10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.
5. Skaitli a sauc par *pirmklasīgu*, ja skaitļu a , a^2 un $a + a^2$ ciparu summas ir pirmskaitlis.
 - a) Atrodiet vismaz vienu *pirmklasīgu* divciparu skaitli!
 - b) Vai $3a$ var būt *pirmklasīgs* skaitlis?
6. Dots 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās un sviru svāri bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?
7. Olga uzrakstīja trīsciparu skaitli. Renārs pierakstīja Olgas skaitlim galā tādu pašu trīsciparu skaitli, tādējādi iegūstot sešciparu skaitli. Pierādīt, ka iegūtais skaitlis noteikti dalās ar trīs pēc kārtas ņemtiem pirmskaitļiem.
8. Orbitreku ciemā ir 20 ciltis, kuras pielūdz dievības. Katru dievību pielūdz tieši 3 ciltis. Orbitreki uzskata, ka brīdi, kad kāda cilts pielūdz tieši 7 dievības, tā atrodas *balansā*. Viedākie Orbitreki ir pierādījuši, ka brīdi, kad visas ciltis būs *balansā*, tad pienāks Pasaules gals. Vai Pasaules gals var pierākt?

9. Rindā nostājušies 20072007 elfi. Daži no elfiem vienmēr runā tikai taisnību, bet pārējie vienmēr melo. Katrs no elfiem apgalvoja, ka vairāk kā trešdaļa no viņa pa kreisi stāvošajiem elfiem melo. Pierādīt, ka tieši trešdaļa no elfiem ir meli.
10. No pirmajiem 80 naturālajiem skaitļiem izvēlējās 20 pāra skaitļus un 20 nepāra skaitļus. Izvēlēto pāra skaitļu summa ir vienāda ar izvēlēto nepāra skaitļu summu. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem ir divi tādi, kuru summa ir 81.
11. Katrā kvadrāta $ABCD$ virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrii spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi - dzeltena, trešo reizi - sarkana, ceturto reizi - dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes A un C ir sarkanas, bet B un D vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdzus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?
12. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1 ; 0 ; 1 . Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2×2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0 , bet katrā 3×3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1 ?
13. Dots 7×7 rūtiņu tīkls ar rūtiņu malu garumu 1 metrs. Spēlētāji Mārtiņš un Edgars pamīšus pārvieto savus kauliņus pa rūtiņu virsotnēm. Turklāt kauliņus gājienā drīkst pārvietot tieši par 1 metru un tikai uz virsotnēm, uz kurām iepriekš nav bijis neviens cits kauliņš. Mārtiņš spēli uzsāk no virsotnes M , bet Edgars no virsotnes E . Spēlētājs, kurš vairs nespēj izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot, ja



14. Uz skaitļu taisnes atzīmēti visi vesēlie punkti, t.i., punkti, kuri atbilst vesēliem skaitļiem. Katrus divus punktus x un y savieno ar loku, ja $|x-y|$ ir pirmskaitlis. Kāds ir mazākais to krāsu skaits, kurās var nokrāsot visus atzīmētos punktus tā, lai katri divi ar loku savienotie punkti būtu nokrāsoti dažādās krāsās?
15. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši 2 reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7 . Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

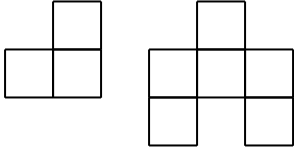
Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”



Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt a) 8×8 ; b) 9×9 rūtiņu tīklu, katru no tām izmantojot vismaz vienu reizi (figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties).



2. Vai septiņstūrim var būt
 - i) 6 šauri leņķi
 - ii) 5 šauri leņķi
3. Skaitli a sauc par *pirmklasīgu*, ja skaitļu a ; a^2 un $a + a^2$ ciparu summas ir pirmskaitlis.
 - i) Atrodiet vismaz vienu *pirmklasīgu* divciparu skaitli!
 - ii) Vai $3a$ var būt *pirmklasīgs* skaitlis?
4. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atviegojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1; 3, 5, 7, 9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2, 4, 6, 8, 10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.
5. Dots, ka x un y ir nenegatīvi skaitļi, kuru summa nepārsniedz 1. Pierādīt, ka $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$.
6. Doti skaitļi no 1 līdz 2007^2 . Pierādīt, ka šo skaitļu atlikumu, dalot ar 2007, summa dalās ar 2007^2 .
7. Dots 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās n sviru svāri bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?
8. Uz skaitļu taisnes atzīmēti visi veseli punkti, t.i., punkti, kuri atbilst veseliem skaitļiem. Katrus divus punktus x un y savieno ar loku, ja $|x-y|$ ir pirmskaitlis. Kāds ir mazākais to krāsu skaits, kurās var nokrāsot visus atzīmētos punktus tā, lai katri divi ar loku savienotie punkti būtu nokrāsoti dažādās krāsās?
9. Rindā nostājušies 20072007 elfi. Daži no elfiem vienmēr runā tikai taisnību, bet pārējie vienmēr melo. Katrs no elfiem apgalvoja, ka vairāk kā trešdaļa no viņa pa kreisi stāvošajiem elfiem melo. Pierādīt, ka tieši trešdaļa no elfiem ir meļi.

10. Dots trīs vienādības

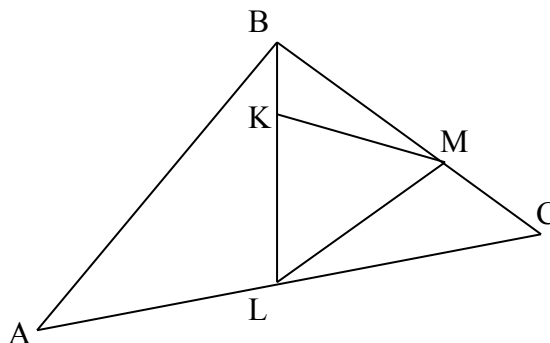
$$a^2 + b^2 = \frac{25ab}{12}$$

$$a^2 + c^2 = \frac{13ac}{6}$$

$$b^2 + c^2 = \frac{5bc}{2}$$

Atrast tādu skaitļu a, b, c trijnieku, ka visas trīs vienādības izpildās. Pierādīt, ka tādu trijnieku ir bezgalīgi daudz.

11. Trijstūra ABC leņķi sakrīt ar $\triangle LMC$ leņķiem, savukārt $\triangle LMC$ leņķi sakrīt ar $\triangle LMK$ leņķiem un $\triangle LMK$ leņķi sakrīt ar $\triangle KMB$ leņķiem. Noteikt leņķa B lielumu.



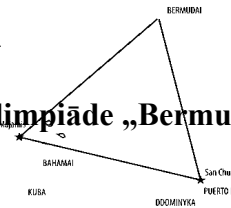
12. Skolotājam Gabrielam bija aizdomas, ka viņa stundā daži skolēni guļ. Slepis pirms stundas viņš klases visos 6 stūros (klasei ir tāda regulāra sešstūra forma, kura malas garums ir a) uzstādīja krācējmetrus. Katrs krācējmetrs fiksē to telpas iekšpusē guļošo skaitu, kuri no tā atrodas attālumā, kas nepārsniedz a . Pēc stundas izrādījās, ka visi krācējmetri kopā fiksējuši 7 guļošos. Cik skolēnu gulēja stundā? (*Par regulāru sešstūri sauc sešstūri, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.*)

13. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1 ; 0 ; 1 . Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2×2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0 , bet katrā 3×3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1 ?

14. Katrā kvadrāta $ABCD$ virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi - dzeltena, trešo reizi - sarkana, ceturto reizi - dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes A un C ir sarkanas, bet B un D vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vaiākas reizes nospiežot slēdzus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

15. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši n reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7 . Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

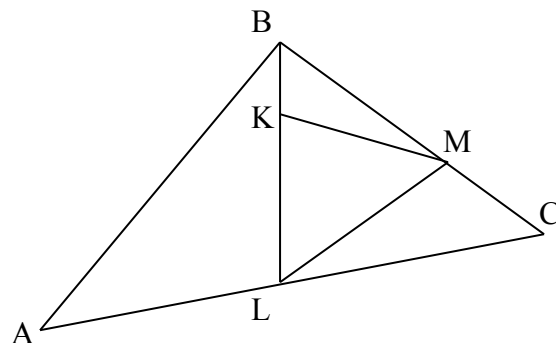
Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”



Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atviegojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1,3,5,7,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2,4,6,8,10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.
2. Orbitreku ciemā ir 20 ciltis, kuras pielūdz dievības. Katru dievību pielūdz tieši 3 ciltis. Orbitreki uzskata, ka brīdi, kad kāda cilts pielūdz tieši 7 dievības, tā atrodas *balansā*. Viedākie Orbitreki ir pierādījuši, ka brīdi, kad visas ciltis būs *balansā*, tad pienāks Pasaules gals. Vai Pasaules gals var pierākt?
3. Dots 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās n sviru svāri bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?
4. Uz trijstūra ABC malām AB , BC un AC atzīmēti attiecīgi punkti C_1 , A_1 un B_1 tā, ka $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Pierādīt, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ augstumu krustpunkts atrodas uz leņķa A bisektrises.
5. Dots, ka x un y ir nenegatīvi skaitļi, kuru summa nepārsniedz 1. Pierādīt, ka $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$.
6. No pirmajiem 80 naturālajiem skaitļiem izvēlējās 20 pāra skaitļus un 20 nepāra skaitļus. Izvēlēto pāra skaitļu summa ir vienāda ar izvēlēto nepāra skaitļu summu. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem ir divi tādi, kuru summa ir 81.
7. Skolotājam Gabrielam bija aizdomas, ka viņa stundā daži skolēni gul. Slepuss pirms stundas viņš klases visos 6 stūros (klasei ir tāda regulāra sešstūra forma, kura malas garums ir a) uzstādīja krācējmetrus. Katrs krācējmetrs fiksē to telpas iekšpusē guļošo skaitu, kuri no tā atrodas attālumā, kas nepārsniedz a . Pēc stundas izrādījās, ka visi krācējmetri kopā fiksējuši 7 guļošos. Cik skolēnu gulēja stundā? (Par regulāru sešstūri sauc sešstūri, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.)



8. Trijstūra ABC leņķi sakrīt ar $\triangle LMC$ leņķiem, savukārt $\triangle LMC$ leņķi sakrīt ar $\triangle LMK$ leņķiem un $\triangle LMK$ leņķi sakrīt ar $\triangle KMB$ leņķiem. Noteikt leņķa B lielumu.

9. Katrā kvadrāta $ABCD$ virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi- dzeltena, trešo reizi- sarkana, ceturto reizi- dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes A un C ir sarkanas, bet B un D vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdzus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

10. Dots trīs vienādības

$$a^2 + b^2 = \frac{25ab}{12}$$

$$a^2 + c^2 = \frac{13ac}{6}$$

$$b^2 + c^2 = \frac{5bc}{2}$$

Atrast tādu skaitļu a, b, c trijnieku, ka visas trīs vienādības izpildās. Pierādīt, ka tādu trijnieku ir bezgalīgi daudz.

11. Divi riteņbraucēji sāk braukt no viena punkta. Pirmais no tiem dodas dienvidu virzienā, ciemoties pie vecmāmiņas. Kad riteņbraucējs nobraucis 1 km tas apstājas, lai atpūstos, tad nobrauc vēl 3 km un atkal apstājas. Tā viņš turpina, katru reizi līdz nākamajai apstāšanās reizei nobraucot par 2 km vairāk nekā līdz iepriekšējai apstāšanās reizei. Nonācis galā pie vecmāmiņas viņš konstatē, ka bija apstājies n reizes. Otrais pie savas vecmāmiņas riteņbraucējs brauc tieši tādā pašā manierē kā pirmais braucējs, ceļā līdz vecmāmiņai veicot n apstāšanās. Tikai, atšķirība no pirmā, braukšanu viņš uzsāk pretējā virzienā (ziemeļu virzienā) un līdz pirmajai apstāšanās reizei nobrauc 2 km, nevis 1 km. Pierādīt, ka attālums starp abu riteņbraucēju vecmāmiņām dalās ar $2n+3$.

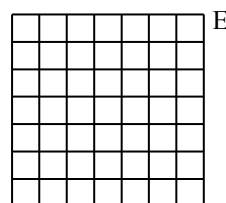
12. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem $-1; 0; 1$. Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2×2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0, bet katrā 3×3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1?

13. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši n reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7 . Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

14. Dots $n \times n$ rūtiņu tīkls ar rūtiņu malu garumu 1 metrs. Spēlētāji Mārtiņš un Edgars pamīšus pārvieto savus kauliņus pa rūtiņu virsotnēm. Turklāt kauliņus gājienā drīkst pārvietot tieši par 1 metru un tikai uz virsotnēm, uz kurām iepriekš nav bijis neviens cits kauliņš. Mārtiņš spēli uzsāk no virsotnes M , bet Edgars no virsotnes E . Spēlētājs, kurš vairs nespēj izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot, ja

i) $n=7$

ii) $n=6$



15. Dots, ka a ir reāls skaitlis. Pierādīt

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2^{2007}} \geq 2(a + a^5 + a^9 + \dots + a^{2^{2007}+1}).$$

M