atvērtā kopa 2016

Komandu olimpiāde matemātikā
10. klases uzdevumu atrisinājumi

1. **Uzdevums:**

   Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

   五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

   Risinājums:

   Ievērosim sakarību 二 · 二＝四 un apskatīsim, kādas vērtības var pieņemt 二:

   Ja 二 ir vismaz četri, tad 二 · 二 ir vismaz 16, bet 四 ir ne lielāks kā 10. Tātad 二 ir mazāks par 4.

   Ja 二 = 1, tad arī 四 = 二 · 二 = 1, bet dažādiem simboliem atbilst dažādi skaitļi. Tātad 二 ir 2 vai 3.

   Ja 二 = 3, tad 四 ir 9, bet tad 四 + 四 = 18, bet no otras puses 四 + 四 < 十, kas nozīmētu, ka 十 > 18, bet 十 ir ne lielāks par 10, pretruna.

   Tātad 二 = 2, līdz ar to 四 = 4, 六＝二＋四 = 2+4 = 6, un 十 > 8 = 四 + 四, līdz ar to 十 = 9 vai 十 = 10.

   Ja 十 = 9, tad iegūstam pretrunu, jo 五 ·2 ＝ 9, bet vienādības kreisā puse ir pāra skaitlis, savukārt labā - nepāra.

   Līdz ar to 十 = 10 un 五 = 5.

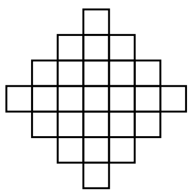
   Viegli pārbaudīt, ka prasītās sakarības tiešām izpildās:

   $5 \cdot 2 = 10$　　$2+4 = 6$　　$2 \cdot 2 = 4$　　$4+4<10$

   Tātad der 五 =5 二 =2 四 =4 六 =6 十 =10.

2. **Uzdevums:**

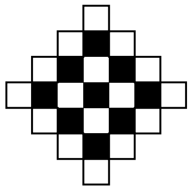
   Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:

   Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

Risinājums:

Nokrāsosim katru būrīti vai nu melnu, vai baltu kā šaha galdiņu (proti, nokrāsojam katram būrītim blakusesošo pretējā krāsā):



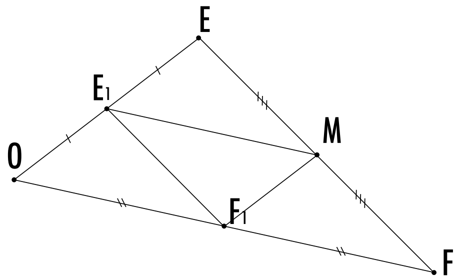
Ievērosim, ka no melna lauciņa vēzis var pāriet tikai uz baltu, un otrādāk. Turklāt, šajā krāsojumā ir 16 balti un 9 melni lauciņi. Tas nozīmē, ka pēc viena plaukstu sasitiena uz melnajiem būrīšiem varēs pāriet tikai maksimums 9 vēži, bet no melnajiem būrīšiem izies visi 16. Līdz ar to $16 - 9 = 7$ būrīši paliks tukši.

3. **Uzdevums:**

Izliekta četrstūra *ABCD* laukums ir *S*. Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts *O*. Punkti *E*, *F*, *G*, *H* ir simetriski punktam *O* attiecībā pret *ABCD* malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra *EFGH* laukumu!

Risinājums:

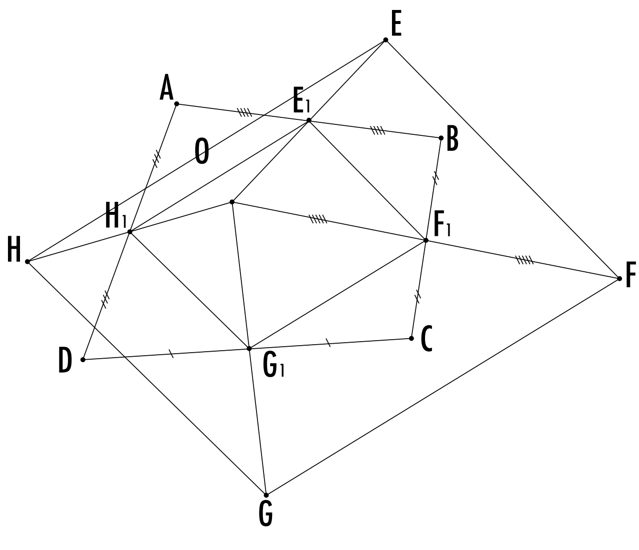
Vispirms apskatīsim dažas trijstūra viduslīnijas īpašības:



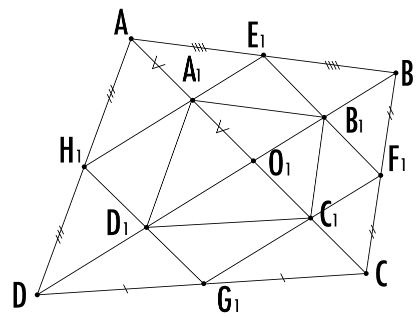
Piemēram, pieņemsim, ka trijstūra *OEF* viduslīnija ir E_1F_1, tad, tā kā $\frac{OE}{OE_1} = \frac{OF}{OF_1} = 2$ un $\angle EOF = \angle E_1OF_1$, iegūstam, ka trijstūris *EOF* līdzīgs trijstūrim E_1OF_1, līdz ar to $\angle OEF = \angle OE_1F_1$ un taisnes *EF* un E_1F_1 ir paralēlas.

Ja vēl papildus atliekam punktu *M*, kas ir malas *EF* viduspunkts, un savienam to ar E_1F_1 tad nav grūti pierādīs, ka $\triangle E_1OF_1 = \triangle E_1EM = \triangle FF_1M = \triangle E_1F_1M$, līdz ar to arī katra “mazā” trijstūrīša laukums ir vienāds ar ceturtdaļu no “lielā” trijstūra laukuma.

Apskatīsim konkrēto uzdevumu



Vispirms noteiksim $E_1F_1G_1H_1$ laukumu. Ievērosim, ka E_1, F_1, G_1, H_1 ir malu viduspunkti, un savienosim tos, kā arī novilksim abas diagonāles kā redzams zīmējumā:



Apskatot trijstūri DAB nav grūti pamanīt, ka H_1E_1 ir tā viduslīnija, līdz ar to pēc iepriekš parādītā, $\triangle H_1AE_1$ līdzīgs $\triangle DAB$. No līdzības seko, ka AA_1 un AO attiecas tā par kā līdzīgo trijstūru malas. Līdz ar to $AA_1 = A_1O$, līdzīgi arī $BB_1 = B_1O$, $CC_1 = C_1O$ un $DD_1 = D_1O$. Līdz ar to trijstūra AOB viduslīnija ir A_1B_1, un iegūstam, ka laukums $S_{A_1O_1B_1E_1} = S_{A_1O_1B_1} + S_{B_1E_1A_1} = 2S_{A_1O_1B_1} = \frac{1}{2}S_{AO_1B}$.

Tādēļ, tā kā analoga sakarība izpildās arī pārējiem trijstūriem, tad iegūstam, ka $S_{E_1F_1G_1H_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Apskatot atkal visu situāciju, iegūstam, ka G_1F_1 ir trijstūra FOG viduslīnija, jo pēc simetriskās konstrukcijas, $OF_1 = F_1F$ un $OE_1 = E_1E$. No tā seko, ka $S_{FOE} = 4S_{F_1OE_1}$. Līdzīgi arī ar FOG, GOH un EOH.

Bet, tā kā

$$\frac{1}{4}S_{EFGH} = S_{FOE} + S_{GOF} + S_{HOG} + S_{EOH} =$$

$$= S_{F_1OE_1} + S_{G_1OF_1} + S_{H_1OG_1} + S_{E_1OH_1} = S_{E_1F_1G_1H_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Tad $S_{EFGH} = 4 \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2 \cdot SABCD = 2S$.

4. **Uzdevums:**

   Pa virtuves grīdu ar nemainīgu ātrumu rāpo prusaks. Ik pēc $15s$ prusaks pagriezās 90 pa labi vai pa kreisi. Pēc kāda laika prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā. Pierādīt, ka prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā pēc vesela skaita minūšu (laiku, kas nepieciešams, lai prusaks pagrieztos, neņemt vērā)!

   Risinājums:

   Ievērosim, ka, ja prusaks ir norāpojis x vienības virzienā uz austrumiem, tad lai atgrieztos sākumpunktā, viņš noteikti būs norāpojis arī x rūtiņas uz rietumiem. Līdzīgi, ja viņš ir norāpojis y rūtiņas uz ziemeļiem, tad viņam, lai atgrieztos sākumpunktā, būs jānorāpo y rūtiņas uz dienvidiem.

   Tas nozīmē, ka prusaks kopā ir norāpojis $2x$ rūtiņas austrumu-rietumu virzienā un $2y$ dienvidu-ziemeļu virzienā.

   Ievērosim, ka tā kā prusaks ir pēc $15s$ pagriežas par 90, tad pēc kustības austrumu-rietumu virzienā notiks kustība dienvidu-ziemeļu virzienā un otrādāk. Tas nozīmē, ka pa $30s$ notiks viena x kustība un viena y kustība.

   Bet, tā kā x un y ir pāra skaitā, tad kopā tiks patērēts pāra skaits $30s$, bet tas nozīmē, ka tiks patērēts vesels skaits minūšu.

5. **Uzdevums:**

   Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 2$ izpildās

   $$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

   Risinājums:

Pielietosim matemātisko indukciju

Indukcijas bāze: ja $n = 2$, tad acīmredzams, ka $2 * 1 = 3 * 2 * 1/3$

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka pie $n - 1$ izpildās

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

Induktīvā pāreja:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1)$$

Pēc induktīvā pieņēmuma seko, ka

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + n \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)}{3} = \frac{(n-1)(n(n-2) + 3n)}{3} = \frac{(n-1)(n^2+n)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Kas arī bija jāpierāda, līdz ar to induktīvais pieņēmums izpildās.

Tā kā pieņēmums izpildās, ja $n = 2$, turklāt, ja pieņēmums izpildās kādam k, tad tas izpildās arī $k + 1$, tad pieņēmums izpildās visiem naturāliem skaitļiem n. Kas arī bija jāpierāda.

6. **Uzdevums:**

Zole ir 3 spēlētāju spēle, kuru spēlē ar 26 dažādām kārtīm. Kārtis tiek izdalītas sekojoši: katram spēlētājam pa astoņām un divas tiek liktas "galdā".

Aprēķināt, cik dažādi sākotnējie izdalījumi ir iespējami, ņemot vērā, ka kāršu secībai rokā un galdā nav nozīmes.

Risinājums:

Apskatīsim vienkāršāku gadījumu: cik veidos varam iedalīt vienam spēlētājam astoņas kārtis no divdesmit sešām, pieņemot, ka kāršu secībai rokās ir nozīme. Mēs pirmo kārti varam izvēlēties kā vienu no 26, otro kā vienu no 25 atlikušajām, trešo no 24 utt. Līdz visbeidzot iegūstam, ka to var izdarīt $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 19$ dažādos veidos, ko var pārrakstīt, kā $\frac{26!}{18!}$ (atsaucot atmiņā, ka pieraksts $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

Tagad pieņemsim, ka mums tomēr nav svarīga secība. Skaidrs, ka iepriekšējais skaits, kas ņem vērā secību pārsniedz to, kas neņem vērā secību, jo, piemēram, pēc pirmā kritērija virknes $1, 2, 3$ un $2, 1, 3$ ir dažādas, bet pēc otrā - vienādas. Centīsimies atrast precīzi par cik mūsu sākotnējais skaits atšķiras no šobrīd meklētā. Ievērosim, ka ja mums rokās ir 8 kārtis, tad varam atrast cik daudzās dažādās secībās varam izvietot šīs kārtis: proti, no rokā esošajām astoņām kārtīm, kā pirmo pēc kārtas varam ņemt jebkuru no astoņām, kā otro jebkuru no 7 atlikušajām utt, līdz beidzot iegūstam, ka jebkuras astoņas kārtis varam izvietot $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$ dažādās secībās. Bet tas nozīmē, ka beigu beigās esam ieguvuši, ka katrai 8 nesakārtotu kāršu secībai atbilst 8! Sakārtotu kāršu secības.

Līdz ar to nesakārtoto iedalījumu skaits ir 8! Reizes mazāks kā sakārtoto iedalījumu skaits. Līdz ar to, tas ir $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 19/(8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1) = \frac{26!}{18! \cdot 8!}$

Tagad, ievērosim, ka kad esam izdalījuši astoņas kārtis pirmajam spēlētājam, mums paliek 18 otrajam. Līdz ar to, viņam mēs varēsim $18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{18!}{10!}$ Veidos iedalīt kārtis, ja secība ir svarīga, un tādēļ $18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 11/(8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1) = \frac{18!}{10! \cdot 8!}$ veidos iedalīt otrajam, ja secība nav svarīga.

Tālāk, ar līdzīgiem spriedumiem iegūstam, ka trešajam varam iedalīt $\frac{10!}{8! \cdot 2!}$, un galdā atlikušās divas kārtis varam iedalīt vienā vienīgā veidā.

Līdz ar to galu galā apvienojot visus veidus, iegūstam, ka kopējais izdalījumu skaits ir

$$\frac{26!}{18! \cdot 8!} \cdot \frac{18!}{10! \cdot 8!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 1 = \frac{26!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2!}$$

7. **Uzdevums:**

   Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

   Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets.

   Arī Liedars vēlējās "izperēt"olu. Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 3 apļus 2 minūtēs. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

   Risinājums:

   Ja Liedars trīs apļus noiet divās minūtē, tad 10s jeb sestdaļā minūtes viņš noiet ceturtdaļu apļa. Labi zināms, ka sadalot riņķa līniju ceturtdaļās iegūstam regulāru sešstūri.

   Regulāra četrstūra malas garumu iespējams izrēķināt no rādiusa pēc Pitagora teorēmas kā $\sqrt{100^2+100^2} = 100\sqrt{2}$, līdz ar to Liedars noies $400\sqrt{2}$ metrus vienā aplī, un $4000\sqrt{2}$ metrus kopā.

   Ievērosim, ka $2\sqrt{2} < 3$, jo $8 < 9$, līdz ar to arī $4000\sqrt{2} < 6000 < 2000\pi$ un Liedara ola neizšķilsies.

8. **Uzdevums:**

   Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

   Risinājums:

   Ievērosim, ka uzdevuma nosacījumi atļauj triju veidu griezienus - jo paralēlskaldnim ir skaldnes trīs dažādos virzienos. Papildu, griezienu secībai nav nozīmes.

   Ievērosim, ka a vertikāli griezieni rada $a+1$ vertikālu šķēli, bet b horizontāli griezieni $b+1$ horizontālu šķēli, un c griezieni pa dziļumu rada $c+1$ dziļuma šķēli. Ja vispirms izdarām a vertikālus griezienus, un tad b horizontālus, tad iegūstam $b+1$ horizontālu gabalu, kas katrs ir sadalīts $a+1$ vertikālā gabalā, jeb $(a+1)\cdot(b+1)$ gabalu kopā, un pēc tam izdarot c griezienus dziļumā katrs no $(a+1)\cdot(b+1)$ gabala tiek sagriezts $c+1$ gabalā un beigās veidojas $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$ maizes gabals.

   Tas nozīmē, ka gabalu skaits ir $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) = 42$, līdz ar to, tā kā $a+1$ un $b+1$, un $c+1$ ir naturāli skaitļi, tad tie ir 42 dalītāji. Papildu, mēs gribam, lai $a+b+c$ būtu pēc iespējas mazāks. Aplūkosim visus gadījumus:

   - Ja $a+1=1$ un $b+1=1$, un $c+1=42$, tad $a+b+c=41$
   - Ja $a+1=1$ un $b+1=2$, un $c+1=21$, tad $a+b+c=21$
   - Ja $a+1=1$ un $b+1=3$, un $c+1=14$, tad $a+b+c=15$
   - Ja $a+1=1$ un $b+1=6$, un $c+1=7$, tad $a+b+c=11$
   - Ja $a+1=2$ un $b+1=3$, un $c+1=7$, tad $a+b+c=9$
   - pārējie gadījumi ir simetriski, un, tā kā apmainot a un b un c vietām nekas nemainās, tad citus gadījumus nav nepieciešams aplūkot.

   Viegli pamanīt, ka mazākais griezienu skaits $a+b=9$.

9. **Uzdevums:**

   Dota funkcija f, zināms, ka visiem pozitīviem x izpildās:

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

   Aprēķināt $f(2)$.

   Risinājums:

   Ievietosim $x = 2$,

$$f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

   Ievietosim $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2) = \frac{1}{4}$$

   Pareizināsim otro izteiksmi ar divi

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(2) = \frac{1}{2}$$

   un pieskaitīsim tam pirmo vienādojumu

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(2) + f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 4$$

$$-3f(2) = 4\frac{1}{2}$$

$$f(2) = -1\frac{1}{2}$$

   Kas arī bija jāatrod.

10. **Uzdevums:**

    Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

    Risinājums:

    Sadalām visus Kongresa pārstāvjus jebkādā veidā divās palātās.

    Tagad apskatīsim "kopējo ienaidnieku skaitu", proti, izskaitīsim, cik ienaidnieki katram kongresa loceklim ir starp citiem savā palātā, un saskaitīsim to visu kopā. Apzīmēsim šo skaitu ar x.

    Pieņemsim, ka ir kāds kongresa loceklis, kuram savā palātā ir vairāk kā 2 ienaidnieki (ja tāda nav, tad dalījums der, un esam izpildījuši uzdevumu). Skaidrs, ka ja starp savas palātas locekļiem kādam ir vairāk par 2 ienaidniekiem, tad pārejot uz otru palātu, viņa ienaidnieku skaits nevar būt lielāks kā 2 (jo tad tas nozīmētu, ka loceklim ir vairāk kā 5 ienaidnieki, pretruna ar uzdevuma nosacījumiem). Tas nozīmē, ka pēc šādas pārejas, kopējais ienaidnieku skaits noteikti samazinās vismaz par 1 (jo pirms tam mums bija vairāk kā 2 abpusēji ienaidnieki, bet tagad ir ne vairāk kā divi).

    Atkārtosim šo pāriešanu ar visiem cilvēkiem, kuriem ir vairāk kā 2 ienaidnieki savā palātā. Šādas pāriešanas veidā var gadīties, ka izveidojas jauni cilvēki, kuriem ir vairāk kā 2 ienaidnieki, bet tā nav problēma, jo, tā kā x ar katru pāriešanu samazinās vismaz par 1, tad vienā brīdī noteikti vairs nevarēs veikt pāriešanas, jo x nevar samazināties bezgalīgi ilgi (tas ir galīgs skaitlis).

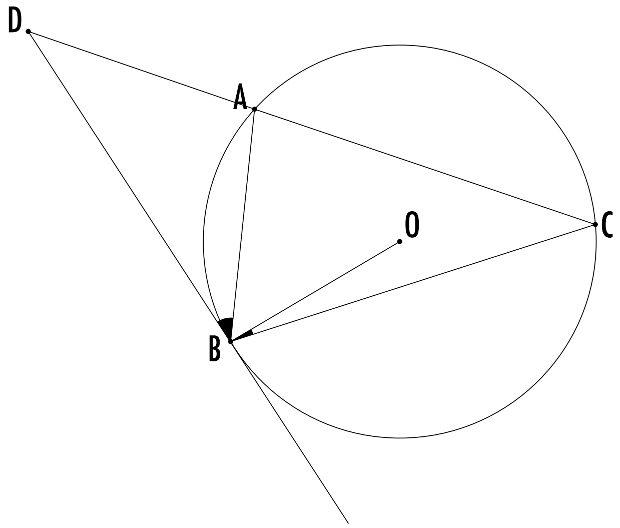
    Šajā brīdī arī mūsu dalījums apmierina uzdevuma nosacījumus.

11. **Uzdevums:**

Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Riņķa līnijas pieskare punktā B un malas AC pagarinājums krustojas punktā D. Zināms, ka leņķis $\angle CBO$ vienāds ar leņķi $\angle ABD$. Pierādīt, ka

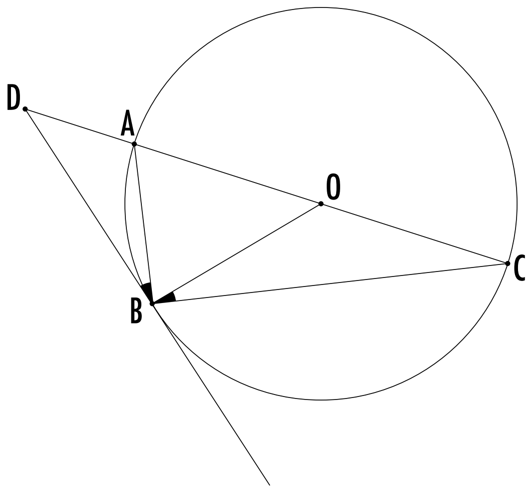
$$AD + AO + OC < DB + CB$$

Risinājums:



Ievērosim, ka $\angle OBD = 90°$ jo BD ir riņķa līnijas pieskare punktā B. Līdz ar to $\angle OBA = 90° - \angle ABD$, bet tas nozīmē, ka $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 90° - \angle ABD + \angle OBC = 90°$, jo $\angle CBO = \angle ABD$.

Tā kā $\angle ABC = 90°$, tad mala AB ir riņķa līnijas diametrs, un O pieder malai AB.



Viegli ievērot, ka $DA + AO + OC = DC$, bet pēc trijstūra nevienādības, $DC < DB + BC$, līdz ar to $DA + AO + OC < DB + BC$ ir patiesa nevienādība.

12. **Uzdevums:**

Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} + x = c$$

Risinājums:

Pārnesam x uz otru pusi

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} = c - x$$

Tā kā x un c ir naturāli, tad $c^3 + c^2x + cx^2 + x^3$ ir pozitīvs, un varam abas vienādības puses pareizināt ar to.

$$31x^4 = (c - x)c^3 + c^2x + cx^2 + x^3$$
$$31x^4 = c^4 - x^4$$
$$32x^4 = c^4$$

Izvelkot trkvadrātsakni no abiem lielumiem, redzam, ka

$$4\sqrt{2}x^2 = c^2$$

Bet tā kā $4\sqrt{2}$ nav naturāls skaitlis, tad arī $4\sqrt{2}x^2$ nav neturāls, bet c^2 ir naturāls skaitlis, pretruna. Tātad nav tādu naturālu skaitļu, kas apmierina prasīto nevienādību.

13. **Uzdevums:**

Zināms, ka x un y ir pozitīvi reāli skaitļi, un $x + y = 1$. Pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

Risinājums:

Atvērism iekavas:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 9$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 8$$

Ievērosim, ka

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy}$$

bet tā kā $x + y = 1$, tad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

Līdz ar to

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 8$$

kļūst par

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xy} \geq 8$$
$$\frac{2}{xy} \geq 8$$
$$\frac{1}{xy} \geq 4$$

Tā kā x un y ir pozitīvi, tad arī xy būs pozitīvs un varam abas vienādojuma puses pareizinār ar to:

$$1 \geq 4xy$$

No abām pusēm atņemam divi:

$$-1 \geq 4xy - 2$$

Divi pārvēršam par $2 = 2x + 2y$ un pārnesam -1 uz otru pusi:

$$0 \geq 4xy - 2x - 2y + 1$$

$$0 \geq (2x - 1)(2y - 1)$$

Tas ir patiesi, jo, ja $x < \frac{1}{2}$ tad $2x - 1 < 0$, bet, tā kā $x + y = 1$, tad $y > \frac{1}{2}$ līdz ar to $2y - 1 > 0$, tādēļ $(2x - 1)(2y - 1)$ ir negatīvs, kā prasīts. Ja $y < \frac{1}{2}$ tad situācija ir simetriska un iegūstam patiesu nevienādību atkal. Ja $x = y = \frac{1}{2}$ tad $(2x - 1)(2y - 1) = 0$ un iegūstam vienādību.

Tātad prasītā sakarība izpildās.

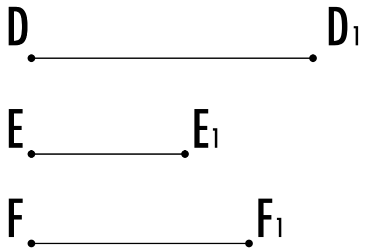
14. **Uzdevums:**

Doti sekojošie nogriežņi:

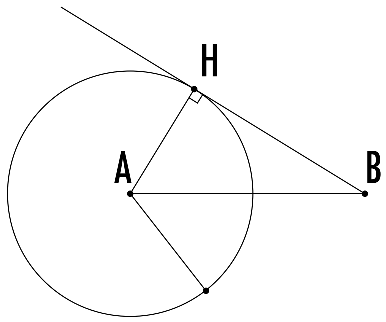
- Nogrieznis DD_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC malu AB,
- Nogrieznis HH_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC augstumu no virsotnes A,
- Nogrieznis MM_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC mediānu no virsotnes B.

Nekas cits par trīsstūri nav zināms. Parādīt kā, izmantojot cirkuli, zīmuli un lineālu bez iedaļām, var uzkonstruēt trīsstūri ABC.

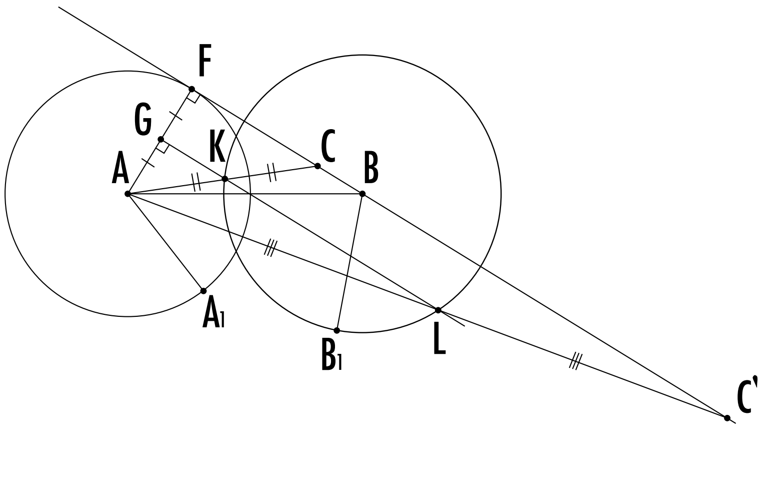
Risinājums:



Uz cirkuļa atliek nogriezni DD_1 pārsauc par AB. Uz cirkuļa atliek nogriezni HH_1 un no virsotnes A novelk riņķa līniju, uz šīs riņķa līnijas noteikti atradīsies augstuma pamata punkts. No virsotnes B konstruē (vienu, jebkuru) pieskari tikko izveidotajai riņķa līnijai. Ievērosim, ka pieskaršanās punkts F arī būs augstuma pamata punkts, turklāt uz pieskares atradīsies arī punkts C.



Tālāk uz cirkuļa atliek MM_1 un no virsotnes B novelk riņķa līniju, uz šīs riņķa līnijas atradīsies mediānas pamata punkts. Konstruē nogriežņa AF vidusperpendikulu, kurš krusto AF punktā G. Vidusperpendikula un riņķa līnijas krustpunktus nosauc par attiecīgi K un L. Tālāk apskatīsim konstrukciju izmantojot punktu K, no kuras iegūsim C, bet izmantojot analogu konstrukciju ar punktu L iegūsim punktu C', un no tā iegūsim vēl vienu variantu trīsstūrim ABC.



Pagarina nogriezni AK līdz tas krusto nogriežņa BF pagarinājumu, krustpunktu nosauc par C. Trijstūris ABC arī ir meklētais, jo AB sakrīt ar doto malu DD_1, AH, kas vienāds ar HH_1, ir perpendikulārs malai BC, līdz ar to arī ir augstums no virsotnes A, un, visbeidzot, BK, kas ir vienāds ar MM_1 dala malu AC uz pusēm, līdz ar to arī ir mediāna.

Tātad esam konstruējuši trīsstūri ABC (turklāt esam apskatījuši abus iespējamos variantus).

15. **Uzdevums:**

Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kam izpildās

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$$

Risinājums:

Pareizinam vienādojuma abas puses ar $2016xy$ (tā kā x un y ir naturāli, tad tas nebūs 0):

$$2016x + 2016y = xy$$

$$xy - 2016x - 2016y = 0$$

Pieskaitām abām pusēm $2016 \cdot 2016$:

$$Xy - 2016x - 2016y + 2016^2 = 2016^2$$

Sadalām reizinātājos:

$$(x - 2016)(y - 2016) = 2016^2$$

Ievērojam, ka katriem diviem 2016^2 naturāliem dalītājiem d_1 un d_2, ka $d_1 \cdot d_2 = 2016^2$, varam atrast tieši vienu tādu x un y pāri, ka $x - 2016 = d1$, $y - 2016 = d2$. Tātad pāru skaits ir tāds pats kā 2016^2 dalītāju skaits.

Ievērosim, ka $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, līdz ar to $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Jebkurš dalītājs būs izsakāms formā $2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$, kur $x \in \{0, 1 \ldots 10\}$, $y \in \{0, 1 \ldots 4\}$, $z \in \{0, 1, 2\}$. Līdz ar to dalītāju skaits ir $11 \cdot 5 \cdot 3$, jo x var izvēlēties vienā no 11 veidiem, y vienā no pieciem utt.

Līdz ar to ir $11 \cdot 5 \cdot 3$ prasīto skaitļu pāru.