atvērtā kopa
2016

Komandu olimpiāde matemātikā
11. klases uzdevumu atrisinājumi

1. **Uzdevums:**

   Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

   五 · 二＝十 二 + 四＝六 二 · 二＝四 四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

   Risinājums:

   Ievērosim sakarību 二 · 二＝四 un apskatīsim, kādas vērtības var pieņemt 二:

   Ja 二 ir vismaz četri, tad 二 · 二 ir vismaz 16, bet 四 ir ne lielāks kā 10. Tātad 二 ir mazāks par 4.

   Ja 二 = 1, tad arī 四 = 二 · 二 = 1, bet dažādiem simboliem atbilst dažādi skaitļi. Tātad 二 ir 2 vai 3.

   Ja 二 = 3, tad 四 ir 9, bet tad 四 + 四 = 18, bet no otras puses 四 + 四 < 十, kas nozīmētu, ka 十 > 18, bet 十 ir ne lielāks par 10, pretruna.

   Tātad 二 = 2, līdz ar to 四 = 4, 六＝二＋四 = 2+4 = 6, un 十 > 8 = 四 + 四, līdz ar to 十 = 9 vai 十 = 10.

   Ja 十 = 9, tad iegūstam pretrunu, jo 五 ·2 ＝ 9, bet vienādības kreisā puse ir pāra skaitlis, savukārt labā - nepāra.

   Līdz ar to 十 = 10 un 五 = 5.

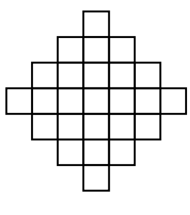
   Viegli pārbaudīt, ka prasītās sakarības tiešām izpildās:

   $5 \cdot 2 = 10$ $2+4 = 6$ $2 \cdot 2 = 4$ $4+4<10$

   Tātad der 五 =5 二 =2 四 =4 六 =6 十 =10.

2. **Uzdevums:**

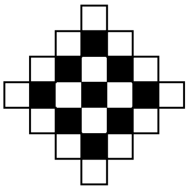
   Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:

   Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

Risinājums:

Nokrāsosim katru būrīti vai nu melnu, vai baltu kā šaha galdiņu (proti, nokrāsojam katram būrītim blakusesošo pretējā krāsā):



Ievērosim, ka no melna lauciņa vēzis var pāriet tikai uz baltu, un otrādāk. Turklāt, šajā krāsojumā ir 16 balti un 9 melni lauciņi. Tas nozīmē, ka pēc viena plaukstu sasitiena uz melnajiem būrīšiem varēs pāriet tikai maksimums 9 vēži, bet no melnajiem būrīšiem izies visi 16. Līdz ar to $16 - 9 = 7$ būrīši paliks tukši.

3. **Uzdevums:**

Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets.

Arī Liedars vēlējās "izperēt"olu. Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 3 apļus 2 minūtēs. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

Risinājums:

Ja Liedars trīs apļus noiet divās minūtē, tad 10s jeb sestdaļā minūtes viņš noiet ceturtdaļu apļa. Labi zināms, ka sadalot riņķa līniju ceturtdaļās iegūstam regulāru sešstūri.

Regulāra četrstūra malas garumu iespējams izrēķināt no rādiusa pēc Pitagora teorēmas kā $\sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$, līdz ar to Liedars noies $400\sqrt{2}$ metrus vienā aplī, un $4000\sqrt{2}$ metrus kopā.

Ievērosim, ka $2\sqrt{2} < 3$, jo $8 < 9$, līdz ar to arī $4000\sqrt{2} < 6000 < 2000\pi$ un Liedara ola neizšķilsies.

4. **Uzdevums:**

Eduards apgalvo, ka ir atradis tādu naturālu skaitli a, ka daļskaitli $\frac{6a+7}{9a+8}$ iespējams saīsināt. Pierādīt, ka Eduards melo.

Risinājums:

Diemžēl Eduards nemelo, jo varam ievērot, ka ja $a = 3$, tad $\frac{6a+7}{9a+8} = \frac{25}{35}$, kas skaidri un gaiši saīsinās.

Eduards vienkārši pārteicās, un patiesībā gribēja pateikt, ka daļskaitli $\frac{6a+7}{9a+10}$ ir iespējams saīsināt kādam naturālam skaitlim a.

Šajā gadījumā atsauksim atmiņā, ka lielākais kopīgais dalītājs skaitļiem x un y tiek apzīmēts kā $lkd(x, y)$, un tam izpildās, ka $lkd(x, y) = lkd(x - y, y)$ visiem naturāliem x un y. Līdz ar to,

$$lkd(9a + 10, 6a + 7) = lkd(3a + 3, 6a + 7) = lkd(3a + 3, 3a + 4) = lkd(3a + 3, 1) = 1$$

Līdz ar to skaitļiem $9a + 10$ un $6a + 7$ nav kopīgu dalītāju nevienam a, un daļu nevar saīsināt.

5. **Uzdevums:**

Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 2$ izpildās

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

Risinājums:

Pielietosim matemātisko indukciju

Indukcijas bāze: ja $n = 2$, tad acīmredzams, ka $2 * 1 = 3 * 2 * 1/3$

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka pie $n - 1$ izpildās

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

Induktīvā pāreja:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1)$$

Pēc induktīvā pieņēmuma seko, ka

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + n \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)}{3} = \frac{(n-1)(n(n-2) + 3n)}{3} = \frac{(n-1)(n^2+n)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Kas arī bija jāpierāda, līdz ar to induktīvais pieņēmums izpildās.

Tā kā pieņēmums izpildās, ja $n = 2$, turklāt, ja pieņēmums izpildās kādam k, tad tas izpildās arī $k+1$, tad pieņēmums izpildās visiem naturāliem skaitļiem n. Kas arī bija jāpierāda.

6. **Uzdevums:**

Zole ir 3 spēlētāju spēle, kuru spēlē ar 26 dažādām kārtīm. Kārtis tiek izdalītas sekojoši: katram spēlētājam pa astoņām un divas tiek liktas "galdā".

Aprēķināt, cik dažādi sākotnējie izdalījumi ir iespējami, ņemot vērā, ka kāršu secībai rokā un galdā nav nozīmes.

Risinājums:

Apskatīsim vienkāršāku gadījumu: cik veidos varam iedalīt vienam spēlētājam astoņas kārtis no divdesmit sešām, pieņemot, ka kāršu secībai rokās ir nozīme. Mēs pirmo kārti varam izvēlēties kā vienu no 26, otro kā vienu no 25 atlikušajām, trešo no 24 utt. Līdz visbeidzot iegūstam, ka to var izdarīt $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 19$ dažādos veidos, ko var pārrakstīt, kā $\frac{26!}{18!}$ (atsaucot atmiņā, ka pieraksts $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

Tagad pieņemsim, ka mums tomēr nav svarīga secība. Skaidrs, ka iepriekšējais skaits, kas ņem vērā secību pārsniedz to, kas neņem vērā secību, jo, piemēram, pēc pirmā kritērija virknes $1, 2, 3$ un $2, 1, 3$ ir dažādas, bet pēc otrā - vienādas. Centīsimies atrast precīzi par cik mūsu sākotnējais skaits atšķiras no šobrīd meklētā. Ievērosim, ka ja mums rokās ir 8 kārtis, tad varam atrast cik daudzās dažādās secībās varam izvietot šīs kārtis: proti, no rokā esošajām astoņām kārtīm, kā pirmo pēc kārtas varam ņemt jebkuru no astoņām, kā otro jebkuru no 7 atlikušajām utt, līdz beidzot iegūstam, ka jebkuras astoņas kārtis varam izvietot $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$ dažādās secībās. Bet tas nozīmē, ka beigu beigās esam ieguvuši, ka katrai 8 nesakārtotu kāršu secībai atbilst 8! Sakārtotu kāršu secības.

Līdz ar to nesakārtoto iedalījumu skaits ir 8! Reizes mazāks kā sakārtoto iedalījumu skaits. Līdz ar to, tas ir $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 19/(8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1) = \frac{26!}{18! \cdot 8!}$

Tagad, ievērosim, ka kad esam izdalījuši astoņas kārtis pirmajam spēlētājam, mums paliek 18 otrajam. Līdz ar to, viņam mēs varēsim $18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{18!}{10!}$ Veidos iedalīt kārtis, ja secība ir svarīga, un tādēļ $18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 11/(8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1) = \frac{18!}{10! \cdot 8!}$ veidos iedalīt otrajam, ja secība nav svarīga.

Tālāk, ar līdzīgiem spriedumiem iegūstam, ka trešajam varam iedalīt $\frac{10!}{8! \cdot 2!}$, un galdā atlikušās divas kārtis varam iedalīt vienā vienīgā veidā.

Līdz ar to galu galā apvienojot visus veidus, iegūstam, ka kopējais izdalījumu skaits ir

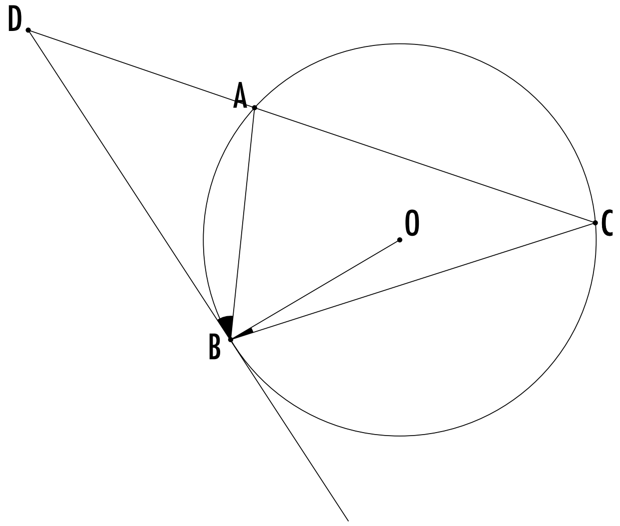
$$\frac{26!}{18! \cdot 8!} \cdot \frac{18!}{10! \cdot 8!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 1 = \frac{26!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2!}$$

7. **Uzdevums:**

   Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Riņķa līnijas pieskare punktā B un malas AC pagarinājums krustojas punktā D. Zināms, ka leņķis $\angle CBO$ vienāds ar leņķi $\angle ABD$. Pierādīt, ka

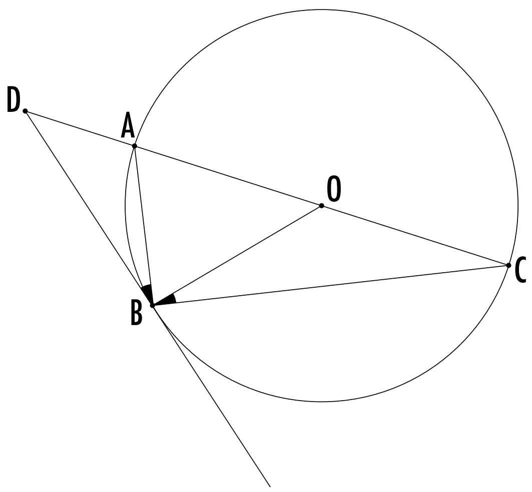
$$AD + AO + OC < DB + CB$$

   Risinājums:



   Ievērosim, ka $\angle OBD = 90^\circ$ jo BD ir riņķa līnijas pieskare punktā B. Līdz ar to $\angle OBA = 90^\circ - \angle ABD$, bet tas nozīmē, ka $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 90^\circ - \angle ABD + \angle OBC = 90^\circ$, jo $\angle CBO = \angle ABD$.

   Tā kā $\angle ABC = 90^\circ$, tad mala AB ir riņķa līnijas diametrs, un O pieder malai AB.



   Viegli ievērot, ka $DA + AO + OC = DC$, bet pēc trijstūra nevienādības, $DC < DB + BC$, līdz ar to $DA + AO + OC < DB + BC$ ir patiesa nevienādība.

8. **Uzdevums:**

   Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

Risinājums:

Ievērosim, ka uzdevuma nosacījumi atļauj triju veidu griezienus - jo paralēlskaldnim ir skaldnes trīs dažādos virzienos. Papildu, griezienu secībai nav nozīmes.

Ievērosim, ka a vertikāli griezieni rada $a+1$ vertikālu šķēli, bet b horizontāli griezieni $b+1$ horizontālu šķēli, un c griezieni pa dziļumu rada $c+1$ dziļuma šķēli. Ja vispirms izdarām a vertikālus griezienus, un tad b horizontālus, tad iegūstam $b+1$ horizontālu gabalu, kas katrs ir sadalīts $a+1$ vertikālā gabalā, jeb $(a+1)\cdot(b+1)$ gabalu kopā, un pēc tam izdarot c griezienus dziļumā katrs no $(a+1)\cdot(b+1)$ gabala tiek sagriezts $c+1$ gabalā un beigās veidojas $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$ maizes gabals.

Tas nozīmē, ka gabalu skaits ir $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) = 42$, līdz ar to, tā kā $a+1$ un $b+1$, un $c+1$ ir naturāli skaitļi, tad tie ir 42 dalītāji. Papildu, mēs gribam, lai $a+b+c$ būtu pēc iespējas mazāks. Aplūkosim visus gadījumus:

- Ja $a+1=1$ un $b+1=1$, un $c+1=42$, tad $a+b+c=41$
- Ja $a+1=1$ un $b+1=2$, un $c+1=21$, tad $a+b+c=21$
- Ja $a+1=1$ un $b+1=3$, un $c+1=14$, tad $a+b+c=15$
- Ja $a+1=1$ un $b+1=6$, un $c+1=7$, tad $a+b+c=11$
- Ja $a+1=2$ un $b+1=3$, un $c+1=7$, tad $a+b+c=9$
- pārējie gadījumi ir simetriski, un, tā kā apmainot a un b un c vietām nekas nemainās, tad citus gadījumus nav nepieciešams aplūkot.

Viegli pamanīt, ka mazākais griezienu skaits $a+b=9$.

9. **Uzdevums:**

Dota funkcija f, zināms, ka visiem pozitīviem x, kas nav vienādi ar 1 vai 0, izpildās:

$$f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x^2$$

Aprēķināt $f(2)$.

Risinājums:

Ievietosim $x=2$,

$$f(2) - f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

Ievietosim $x=-1$:

$$f(-1) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 1$$

Saskaitīsim abas izteiksmes:

$$f(-1) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(2) - f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1+4$$

$$2f(2) = 5$$

$$f(2) = 2\frac{1}{2}$$

Kas arī bija jāatrod.

10. **Uzdevums:**

Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

Risinājums:

Sadalām visus Kongresa pārstāvjus jebkādā veidā divās palātās.

Tagad apskatīsim "kopējo ienaidnieku skaitu", proti, izskaitīsim, cik ienaidnieki katram kongresa loceklim ir starp citiem savā palātā, un saskaitīsim to visu kopā. Apzīmēsim šo skaitu ar x.

Pieņemsim, ka ir kāds kongresa loceklis, kuram savā palātā ir vairāk kā 2 ienaidnieki (ja tāda nav, tad dalījums der, un esam izpildījuši uzdevumu). Skaidrs, ka ja starp savas palātas locekļiem kādam ir vairāk par 2 ienaidniekiem, tad pārejot uz otru palātu, viņa ienaidnieku skaits nevar būt lielāks kā 2 (jo tad tas nozīmētu, ka loceklim ir vairāk kā 5 ienaidnieki, pretruna ar uzdevuma nosacījumiem). Tas nozīmē, ka pēc šādas pārejas, kopējais ienaidnieku skaits noteikti samazinās vismaz par 1 (jo pirms tam mums bija vairāk kā 2 abpusēji ienaidnieki, bet tagad ir ne vairāk kā divi).

Atkārtosim šo pāriešanu ar visiem cilvēkiem, kuriem ir vairāk kā 2 ienaidnieki savā palātā. Šādas pāriešanas veidā var gadīties, ka izveidojas jauni cilvēki, kuriem ir vairāk kā 2 ienaidnieki, bet tā nav problēma, jo, tā kā x ar katru pāriešanu samazinās vismaz par 1, tad vienā brīdī noteikti vairs nevarēs veikt pāriešanas, jo x nevar samazināties bezgalīgi ilgi (tas ir galīgs skaitlis).

Šajā brīdī arī mūsu dalījums apmierina uzdevuma nosacījumus.

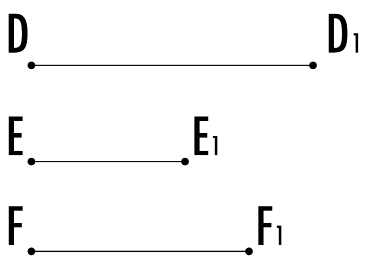
11. **Uzdevums:**

Doti sekojošie nogriežņi:

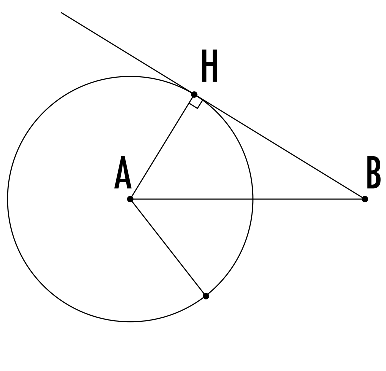
- Nogrieznis DD_1, kas vienāds ar trīsstūra *ABC* malu *AB*,
- Nogrieznis HH_1, kas vienāds ar trīsstūra *ABC* augstumu no virsotnes *A*,
- Nogrieznis MM_1, kas vienāds ar trīsstūra *ABC* mediānu no virsotnes *B*.

Nekas cits par trīsstūri nav zināms. Parādīt kā, izmantojot cirkuli, zīmuli un lineālu bez iedaļām, var uzkonstruēt trīsstūri *ABC*.

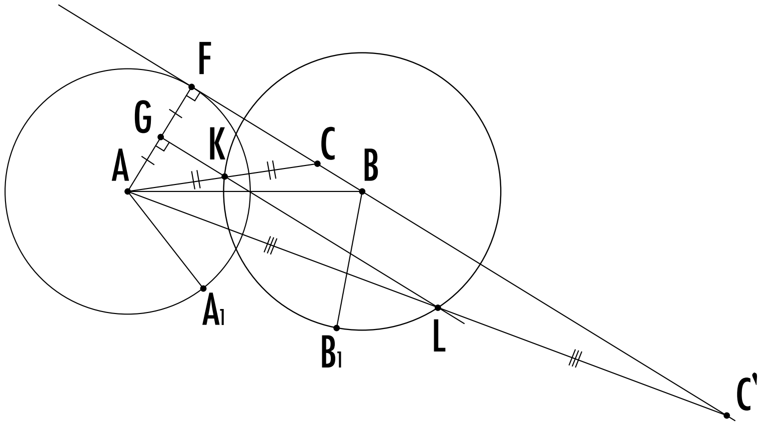
Risinājums:



Uz cirkuļa atliek nogriezni DD_1 pārsauc par *AB*. Uz cirkuļa atliek nogriezni HH_1 un no virsotnes *A* novelk riņķa līniju, uz šīs riņķa līnijas noteikti atradīsies augstuma pamata punkts. No virsotnes *B* konstruē (vienu, jebkuru) pieskari tikko izveidotajai riņķa līnijai. Ievērosim, ka pieskaršanās punkts *F* arī būs augstuma pamata punkts, turklāt uz pieskares atradīsies arī punkts *C*.



Tālāk uz cirkuļa atliek MM_1 un no virsotnes *B* novelk riņķa līniju, uz šīs riņķa līnijas atradīsies mediānas pamata punkts. Konstruē nogriežņa *AF* vidusperpendikulu, kurš krusto *AF* punktā *G*. Vidusperpendikula un riņķa līnijas krustpunktus nosauc par attiecīgi *K* un *L*. Tālāk apskatīsim konstrukciju izmantojot punktu K, no kuras iegūsim C, bet izmantojot analogu konstrukciju ar punktu L iegūsim punktu C', un no tā iegūsim vēl vienu variantu trīsstūrim ABC.



Pagarina nogriezni AK līdz tas krusto nogriežņa BF pagarinājumu, krustpunktu nosauc par C. Trijstūris ABC arī ir meklētais, jo AB sakrīt ar doto malu DD_1, AH, kas vienāds ar HH_1, ir perpendikulārs malai BC, līdz ar to arī ir augstums no virsotnes A, un, visbeidzot, BK, kas ir vienāds ar MM_1 dala malu AC uz pusēm, līdz ar to arī ir mediāna.

Tātad esam konstruējuši trīsstūri ABC (turklāt esam apskatījuši abus iespējamos variantus).

12. **Uzdevums:**

Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3+c^2x+cx^2+x^3}+x=c$$

Risinājums:

Pārnesam x uz otru pusi

$$\frac{31x^4}{c^3+c^2x+cx^2+x^3}=c-x$$

Tā kā x un c ir naturāli, tad $c^3+c^2x+cx^2+x^3$ ir pozitīvs, un varam abas vienādības puses pareizināt ar to.

$$31x^4=(c-x)c^3+c^2x+cx^2+x^3$$

$$31x^4=c^4-x^4$$

$$32x^4=c^4$$

Izvelkot trkvadrātsakni no abiem lielumiem, redzam, ka

$$4\sqrt{2}x^2=c^2$$

Bet tā kā $4\sqrt{2}$ nav naturāls skaitlis, tad arī $4\sqrt{2}x^2$ nav neturāls, bet c^2 ir naturāls skaitlis, pretruna. Tātad nav tādu naturālu skaitļu, kas apmierina prasīto nevienādību.

13. **Uzdevums:**

Zināms, ka $a_1, a_2 \ldots a_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi, un $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, pierādīt, ka

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geq(n+1)^n$$

Risinājums:

Ja visi skaitļi ir vienādi, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$, tad

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{n}}\right)^n = (n+1)^n$$

izpildās vienādība.

Ja savukārt skaitļi nav vienādi, tad paņemsim jebkurus divus skaitļus $a_i < a_j$, un pierādīsim, ka aizvietojot šos skaitļus ar viņu vidējo $\frac{a_i + a_j}{2}$, tiks pastiprināta nevienādības kreisā puse, turklāt nemainīsies summa $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Lai to pierādītu, pietiek parādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_j}\right) > \left(1 + \frac{1}{\frac{a_i + a_j}{2}}\right)^2$$

$$1 + \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_j a_i} > 1 + \frac{4}{a_i + a_j} + \frac{4}{(a_i + a_j)^2}$$

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_j a_i} > \frac{4}{a_i + a_j} + \frac{4}{(a_i + a_j)^2}$$

Tālāk pierādīsim pa daļām:

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j} > \frac{4}{a_i + a_j}$$

$$\frac{a_i + a_j}{a_i a_j} > \frac{4}{a_i + a_j}$$

$$(a_i + a_j)^2 > 4 a_i a_j$$

$$(a_i - a_j)^2 > 0$$

Kas ir patiesa, jo reāla skaitļa kvadrāts ir lielāks par 0.

$$\frac{1}{a_i a_j} > \frac{4}{(a_i + a_j)^2}$$

$$(a_i + a_j)^2 > 4 a_i a_j$$

$$(a_i - a_j)^2 > 0$$

Līdz ar to, tā kā izpildās gan $\frac{1}{a_i a_j} > \frac{4}{(a_i + a_j)^2}$ gan $\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j} > \frac{4}{a_i + a_j}$ tad izpildās arī

$$\left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_j}\right) > \left(1 + \frac{1}{\frac{a_i + a_j}{2}}\right)^2$$

visiem a_i, a_j, ka $a_i < a_j$.

Tas nozīmē, ka vismazākā $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ vērtība tiktu sasniegta, kad vairs nevarētu atrast divus tādus skaitļus, ka $a_i < a_j$, līdz ar to šajā gadījumā visi skaitļi ir vienādi, un izpildās vienādība.

Tā kā visus citos gadījumos vērtība ir vēl lielāka, tad nevienādība izpildās.

14. **Uzdevums:**

Aleksejs paņem bezgalīgi lielu rūtiņu lapu un sāk iekrāsot rūtiņas tā, ka katrai iekrāsotajai rūtiņa ir kopīga mala ar kādu citu iepriekš iekrāsotu rūtiņu (izņemot pirmajai rūtiņai, ko viņš iekrāso).

Kad Aleksejs ir beidzis zīmēt, viņš ievēro, ka ir iekrāsojis tieši 2016 rūtiņas un ka visas iekrāsotās figūras perimetrs ir 4034.

Pierādīt, ka no jebkuras iekrāsotās rūtiņas uz jebkuru citu var nonākt tikai vienā veidā, ja pārvietojas starp iekrāsotajām rūtiņām, šķērsojot tikai malas (nevis stūrus), un neapmeklējot nevienu rūtiņu divreiz.

Risinājums:

Ievērosim, ka ir 2016 rūtiņas, turklāt, tā kā katrai no tām ir 4 malas, tad ir $4 \cdot 2016 = 8064$ malas, ja skaita figūras perimetru, kā arī figūras iekšienē ietvertās malas (ievērosim, ka katra figūras iekšienē ietvertā mala ir ieskaitīta divreiz, jo tā pieder divām rūtiņām, un katra ārējā mala ieskaitīta tieši vienu reizi).

Tā kā perimetrs ir 4034, tad varam noskaidrot, ka figūras iekšienē ir $8064 - 4034 = 4030$ iekšējās malas, ja katru ieskaita divas reizes, jeb $4030/2 = 2015$ iekšējās malas. Katra iekšējā mala savieno divas rūtiņas. Pierādīsim, ka ja ir 2016 rūtiņas un 2015 pārejas malas, tad nav iespējams no vienas rūtiņas uz citu nokļūt vairāk kā vienā veidā.

Vispirms, pieņemsim, ka tas ir iespējams, proti, eksistē divas tādas rūtiņas A un B, ka varam atrast $i-1$ rūtiņu $C_1, C_2 \dots C_{i-1}$, un $j-1$ rūtiņu $D_1, D_2 \dots D_{j-1}$, ka gan

$$AC_1C_2 \cdots C_{i-1}B$$

gan

$$AD_1D_2 \cdots D_{j-1}B$$

ir divi dažādi derīgi ceļi, kas savieno A ar B, turklāt šo ceļu kopgarums ir mazākais iespējamais.

Ievērosim, ka mazākais ceļu kopgarums nozīmē, ka starp rūtiņām $C_1, C_2 \dots C_{i-1}$ un $D_1, D_2 \dots D_{j-1}$ nav divu vienādu. Patiesi, ja būtu divas rūtiņas $C_k = D_l$ kuras sakristu, tad mēs varētu apskatīt vai nu rūtiņas A un C_k un abus tās savienojošos ceļus, vai B un C_k savienojošos ceļus, un tie noteikti būtu īsāki, jo tiek izlaistas daļas sākotnējā ceļa.

Līdz ar to, tas nozīmē, ka starp rūtiņām A, B un $C_1, C_2 \dots C_{i-1}$, un $D_1, D_2 \dots D_{j-1}$ ir $i+j$ dažādas malas, jo ir nepieciešamas i malas, lai realizētu ceļu no A līdz B pa C rūtiņām, un j malas lai realizētu ceļu pa D rūtiņām.

Tas nozīmē, ka mums paliek ne vairāk kā $2015 - i - j$ neizmantotas rūtiņu malas un $2016 - i - j$ neizmantotas rūtiņas. Tā kā katra rūtiņa ir piesaistīta vismaz vienai citai rūtiņai, tad katrai rūtiņas noteikti ir viena iekšējā mala. Bet tā kā ir $2016 - i - j$ brīvas rūtiņas, bet ne vairāk kā $2015 - i - j$ iespējamas iekšējās malas, tad noteikti būs vismaz viena rūtiņa, kurai nav iekšējās malas, proti, rūtiņa, kas nav savienota ne ar vienu citu. Bet tā ir pretruna.

Tātad neeksistē divas tādas rūtiņas, ka no vienas uz otru var nokļūt pa vairāk kā vienu ceļu. Līdz ar to izpildās uzdevumā prasītais.

15. **Uzdevums:**

Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kam izpildās

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$$

Risinājums:

Pareizinam vienādojuma abas puses ar $2016xy$ (tā kā x un y ir naturāli, tad tas nebūs 0):

$$2016x + 2016y = xy$$

$$xy - 2016x - 2016y = 0$$

Pieskaitām abām pusēm $2016 \cdot 2016$:

$$Xy - 2016x - 2016y + 2016^2 = 2016^2$$

Sadalām reizinātājos:

$$(x - 2016)(y - 2016) = 2016^2$$

Ievērojam, ka katriem diviem 2016^2 naturāliem dalītājiem d_1 un d_2, ka $d_1 \cdot d_2 = 2016^2$, varam atrast tieši vienu tādu x un y pāri, ka $x - 2016 = d1$, $y - 2016 = d2$. Tātad pāru skaits ir tāds pats kā 2016^2 dalītāju skaits.

Ievērosim, ka $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, līdz ar to $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Jebkurš dalītājs būs izsakāms formā $2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$, kur $x \in \{0, 1 \ldots 10\}$, $y \in \{0, 1 \ldots 4\}$, $z \in \{0, 1, 2\}$. Līdz ar to dalītāju skaits ir $11 \cdot 5 \cdot 3$, jo x var izvēlēties vienā no 11 veidiem, y vienā no pieciem utt.

Līdz ar to ir $11 \cdot 5 \cdot 3$ prasīto skaitļu pāru.