atvērtā kopa 2016

Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

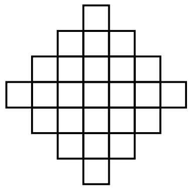
Uzdevumi 11. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

   五 · 二＝十 　 二 + 四＝六 　 二 · 二＝四 　 四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:

   Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

3. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles “Pokemon GO”. Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var “perēt” olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

   Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets.

   Arī Liedars vēlējās “izperēt”olu. Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 3 apļus 2 minūtēs. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

4. Eduards apgalvo, ka ir atradis tādu naturālu skaitli a, ka daļskaitli $\frac{6a+7}{9a+8}$ iespējams saīsināt. Pierādīt, ka Eduards melo.

5. Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 2$ izpildās

   $$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

6. Zole ir 3 spēlētāju spēle, kuru spēlē ar 26 dažādām kārtīm. Kārtis tiek izdalītas sekojoši: katram spēlētājam pa astoņām un divas tiek liktas “galdā”.

   Aprēķināt, cik dažādi sākotnējie izdalījumi ir iespējami, ņemot vērā, ka kāršu secībai rokā un galdā nav nozīmes.

7. Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Riņķa līnijas pieskare punktā B un malas AC pagarinājums krustojas punktā D. Zināms, ka leņķis $\angle CBO$ vienāds ar leņķi $\angle ABD$. Pierādīt, ka

$$AD + AO + OC < DB + CB$$

8. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

9. Dota funkcija f, zināms, ka visiem pozitīviem x, kas nav vienādi ar 1 vai 0, izpildās:

$$f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x^2$$

   Aprēķināt $f(2)$.

10. Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

11. Doti sekojošie nogriežņi:

   - Nogrieznis DD_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC malu AB,
   - Nogrieznis HH_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC augstumu no virsotnes A,
   - Nogrieznis MM_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC mediānu no virsotnes B.

   Nekas cits par trīsstūri nav zināms. Parādīt kā, izmantojot cirkuli, zīmuli un lineālu bez iedaļām, var uzkonstruēt trīsstūri ABC.

12. Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} + x = c$$

13. Zināms, ka $a_1, a_2 \ldots a_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi, un $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$$

14. Aleksejs paņem bezgalīgi lielu rūtiņu lapu un sāk iekrāsot rūtiņas tā, ka katrai iekrāsotajai rūtiņa ir kopīga mala ar kādu citu iepriekš iekrāsotu rūtiņu (izņemot pirmajai rūtiņai, ko viņš iekrāso).

   Kad Aleksejs ir beidzis zīmēt, viņš ievēro, ka ir iekrāsojis tieši 2016 rūtiņas un ka visas iekrāsotās figūras perimetrs ir 4034.

   Pierādīt, ka no jebkuras iekrāsotās rūtiņas uz jebkuru citu var nonākt tikai vienā veidā, ja pārvietojas starp iekrāsotajām rūtiņām, šķērsojot tikai malas (nevis stūrus), un neapmeklējot nevienu rūtiņu divreiz.

15. Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kam izpildās

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$$