atvērtā kopa
2016

Komandu olimpiāde matemātikā
8. klases uzdevumu atrisinājumi

1. **Uzdevums:**

   Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

   五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

   Risinājums:

   Ievērosim sakarību 二 · 二＝四 un apskatīsim, kādas vērtības var pieņemt 二:

   Ja 二 ir vismaz četri, tad 二 · 二 ir vismaz 16, bet 四 ir ne lielāks kā 10. Tātad 二 ir mazāks par 4.

   Ja 二 = 1, tad arī 四 = 二 · 二 = 1, bet dažādiem simboliem atbilst dažādi skaitļi. Tātad 二 ir 2 vai 3.

   Ja 二 = 3, tad 四 ir 9, bet tad 四 + 四 = 18, bet no otras puses 四 + 四 < 十, kas nozīmētu, ka 十 > 18, bet 十 ir ne lielāks par 10, pretruna.

   Tātad 二 = 2, līdz ar to 四 = 4, 六＝二＋四 = 2+4 = 6, un 十 > 8 = 四 + 四, līdz ar to 十 = 9 vai 十 = 10.

   Ja 十 = 9, tad iegūstam pretrunu, jo 五 ·2 ＝ 9, bet vienādības kreisā puse ir pāra skaitlis, savukārt labā - nepāra.

   Līdz ar to 十 = 10 un 五 = 5.

   Viegli pārbaudīt, ka prasītās sakarības tiešām izpildās:

   $5{\cdot}2 = 10$　　$2+4 = 6$　　$2{\cdot}2 = 4$　　$4+4<10$

   Tātad der 五 =5 二 =2 四 =4 六 =6 十 =10.

2. **Uzdevums:**

   Aija un Jānis spēlē sekojošu spēli: katrā gājienā ir iespējams izvēlēties un uzrakstīt kādu skaitli no 10 līdz 99 ieskaitot, vai arī pārbaudīt, vai divu uzrakstīto skaitļu starpība dalās ar 10. Uzvar tas spēlētājs, kuram pirmajam izdodas atrast divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

   Ja Aija sāk, tad kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt, spēlējot pareizi?

   Risinājums:

   Ievērosim, ka skaitlis dalās ar 10 tad un tikai tad, ja tā pieraksts beidzas ar 0 (piemēram: 10, 210 u.c.). Līdz ar to, skaitļu starpība dalās ar 10 tad un tikai tad, ja starpības pēdējais cipars ir 0. Bet tas izpildās tikai tad, ja abiem skaitļiem sakrīt pēdējais cipars.

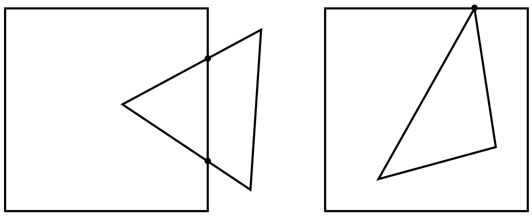
   Līdz ar to, zaudē tas spēlētājs, kurš uzraksta skaitli, kura pēdējais cipars sakrīt ar kāda iepriekš uzrakstīta skaitļa pēdējo ciparu (jo nākamais spēlētājs var pārbaudīt šos skaitļus, un uzvarēt).

Ievērosim, ka ir 10 iespējami pēdējie cipari (no 0 līdz 9). Līdz ar to, spēlētājs, kuram pieder vienpadsmitais gājiens, noteikti uzrakstīs kādu ciparu, kas jau iepriekš ir uzrakstīts, un zaudēs.

Tā kā Annai ir pirmais gājiens, tad Annai būs visi nepāra gājieni, līdz ar to arī vienpadsmitais gājiens, un Jānis vienmēr uzvarēs.

3. **Uzdevums:**

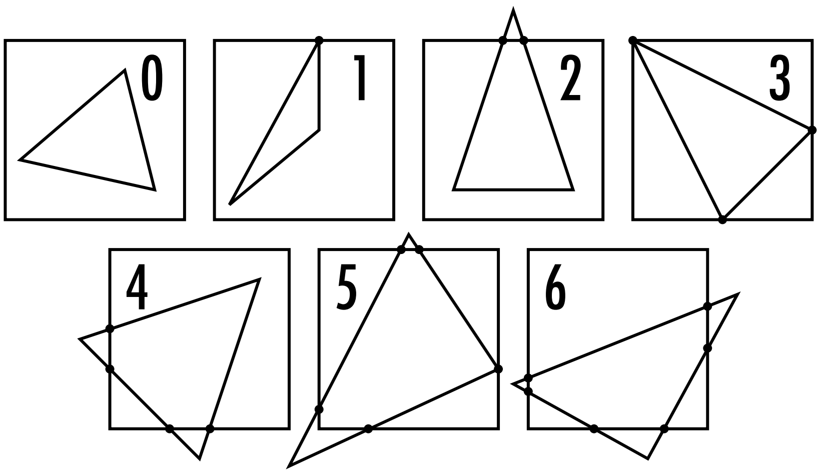
Attēlos parādīts kvadrāts un trīsstūris, kuri krustojas attiecīgi divos un vienā punktā:



Nosaki un parādi visas iespējas, cik krustpunktu var būt kvadrātam un trīsstūrim.

Risinājums:

Iespējamas situācijas, kad ir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 krustpunkti.



Vairāk nav iespējams, jo kvadrāts nevar krustot trijstūra malu vairāk kā 2 punktos. Tā kā trijstūrim ir 3 malas, tad kopā ir maksimums 6 krustpunkti.

4. **Uzdevums:**

Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" šķēli tā, lai 99 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šī maizes šķēle atbilst taisnstūrim ar izmēriem $1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes malu. Mūsu varoņi negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 99, ne obligāti vienādos, gabalos.

Risinājums:

Ievērosim, ka uzdevuma nosacījumi atļauj divu veidu griezienus - horizontālus un vertikālus (paralēli vertikālajai malai, vai paralēli horizontālajai malai). Papildu, griezienu secībai nav nozīmes.

Ievērosim, ka a vertikāli griezieni rada $a+1$ vertikālu šķēli, bet b horizontāli griezieni $b+1$ horizontālu šķēli. Ja vispirms izdarām a vertikālus griezienus, un tad b horizontālus, tad iegūstam $b+1$ horizontālu gabalu, kas katrs ir sadalīts $a+1$ vertikālā gabalā, jeb $(a+1)\cdot(b+1)$ gabalu kopā.

Tas nozīmē, ka gabalu skaits ir $(a+1)\cdot(b+1) = 99$, līdz ar to, tā kā $a+1$ un $b+1$ ir naturāli skaitļi, tad tie ir 99 dalītāji. Papildu, mēs gribam, lai $a+b$ būtu pēc iespējas mazāks. Aplūkosim visus gadījumus:

- Ja $a+1 = 1$ un $b+1 = 99$, tad $a+b = 98$
- Ja $a+1 = 3$ un $b+1 = 33$, tad $a+b = 34$
- Ja $a+1 = 9$ un $b+1 = 11$, tad $a+b = 18$
- pārējie gadījumi ir simetriski, un, tā kā apmainot a un b vietām nekas nemainās, tad citus gadījumus nav nepieciešams aplūkot.

Viegli pamanīt, ka mazākais griezienu skaits $a+b = 18$.

5. **Uzdevums:**

Kārlim un Annai ir jānopin kaut kāds skaits grozu, tomēr viņi negrib tev teikt, cik tieši grozi jānopin. Kārlis viens pats spēj nopīt visus nepieciešamos grozus 6 stundās. Ja Kārlis un Anna strādātu kopā, tad viņi šo grozu skaitu nopītu 2 stundās.

Cik ilgā laikā Anna, strādājot viena pati, spētu nopīt to pašu grozu daudzumu?

Risinājums:

x ... tik grozu jānopin kopā.
$\frac{x}{6}$ ... tik ātri strādā Kārlis.
$\frac{x}{2}$ ... tik ātri strādā Anna un Kārlis kopā.

Viegli pamanīt, ka Annas ātrums, strādājot vienai ir tas pats, kas Annas un Kārļa kopējais ātrums mīnus Kārļa ātrums: $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{x}{3}$

Tātad skaidrs, ka Annai visu grozu nopīšana prasīs $x : \frac{x}{3} = 3$ stundas.

6. **Uzdevums:**

Seši draugi sēž aplī, un katram uz galvas ir vai nu melna, vai balta cepure. Katrs no draugiem redz visu pārējo cepures, bet neredz savu. Turklāt, viņi visi zina, ka vismaz vienam cepure ir atšķirīgā krāsā no pārējo cepurēm.

Pēc kāda brīža viens no viņiem saka: "Es nezinu, kādā krāsā ir mana cepure."

Uz ko kāds cits atbild: "Tev ir melna cepure."

Te pēkšņi, trešais iesaucas: "Iepriekš es nezināju, kādā krāsā ir mana cepure, bet tagad es zinu!"

Kādā krāsā bija katra drauga cepure?

Risinājums:

Tā kā vismaz vienam ir atšķirīga cepure no pārējiem, tad ja kāds draugs redzētu, ka visiem pārējiem ir vienādas cepures, tad viņš noteikti zinātu, ka viņa cepure ir pretējā krāsā (citādi visiem būtu cepures vienā krāsā). Bet tas nozīmētu, ka šis draugs zin savas cepures krāsu.

Pirmais draugs nezināja savas cepures krāsu, tādēļ noteikti starp otro līdz sesto draugu bija gan melnas gan baltas cepures.

Trešais draugs sākumā nezināja savas cepures krāsu, bet pēc tam saprata kādā krāsā ir viņa cepure. Ievērosim, ka otrā drauga teiktais viņam neko nedeva, jo viņš pats arī redz pirmā cepuri. Viņš redz visu pārējo cepures, tādēļ kaut kas, ko pirmais pateica noteikti palīdzēja viņam saprast savas cepures krāsu.

Sapratīsim, ka trešais neko nevarētu izsecināt, ja kādam vēl, izņemot pirmo un trešo būtu melna cepure. Pirmais, pasakot, ka viņš nezin savas cepures krāsu būtu pateicis to, ko trešais jau zin: ka no pirmā skatpunkta ir gan melnas gan baltas cepures, bet tas viņam nepalīdzētu saprast savas cepures krāsu.

Līdz ar to tikai pirmajam vai trešajam var būt melna cepure. Tad viss pārējais izriet loģiski: tā kā pirmais nezināja savas cepures krāsu, tad trešais saprata, ka viņam arī ir melna cepure (pretējā gadījumā visiem izņemot pirmo būtu baltas cepures un pirmais zinātu).

Tātad pirmajam un trešajam ir melnas cepures, un pārējiem ir baltas.

7. **Uzdevums:**

Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets. Arī Liedars vēlējās "izperēt" olu.

Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 1 apli 1 minūtē. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

Risinājums:

Ja Liedars vienu apli noiet vienā minūtē, tad 10s jeb sestdaļā minūtes viņš noiet sestdaļu apļa. Labi zināms, ka sadalot riņķa līniju sestdaļās iegūstam regulāru sešstūri.

Regulāra sešstūra malas garums ir tāds pats kā riņķa līnijas rādiuss, līdz ar to Liedars vienā aplī noies $6 * 100 = 600$ m, un desmit aplōs noies vien 6000 m. Līdz ar to ola neizšķilies.

8. **Uzdevums:**

Mikum ir ļoti iepaticies skaitlis 42^{20}. Reiz viņš šo skaitli centās izprintēt, bet skaitļa devītais cipars netīšām izplūda par ■ simbolu:

$$42^{20} = 29173316787576666706379 6\blacksquare 53374976$$

Palīdzi Mikum atrast izplūdušo ciparu!

Risinājums:

Ievērosim, ka 42 dalās ar 3, līdz ar to $42^{20} = 42 \cdot 42 \cdot 42^{18}$ dalās ar 9. Skaitļiem, kas dalās ar 9, arī ciparu summa dalās ar 9.

Apskatīsim prasītā skaitļa ciparu summu:

$$2+9+1+7+3+3+1+6+7+8+7+5+7+6+6+6+6+7+0+6+3+7+9+6+\blacksquare+5+3+3+7+4+9+7+6 = 172+\blacksquare$$

Ievērosim, ka $172 + \blacksquare = 9 * 19 + 1 + \blacksquare$, kam jādalās ar 9. Līdz ar to arī $1 + \blacksquare$ ir jādalās ar 9, bet, tā kā ■ ir cipars, tad $1 + \blacksquare$ dalās ar 9 tad un tikai tad, ja $\blacksquare = 8$, kas arī ir prasītā atbilde.

9. **Uzdevums:**

Atrast visus naturālus skaitļus x, z, w, ka $2x + 1z + 6w = 2016$ un $1z + 6w = 16$.

Risinājums:

Aizvietosim $1z + 6w$ pirmajā vienādojumā ar 16 no otrā vienādojuma:

$$2x + 16 = 2016$$

$$2x = 2000$$

$$x = 1000$$

Ievērosim, ka ja $w \geq 3$, tad

$$z = 16 - 6w \leq 16 - 18 = -2$$

bet, tad $z < 0$, kas nozīmē, ka z nav naturāls, pretruna. Tātad $w = 1$ vai $w = 2$, no kurienes $z = 10$ vai $z = 4$ attiecīgi.

Līdz ar to der vai nu

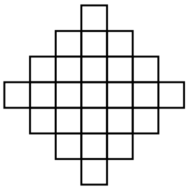
$$x = 1000, z = 10, w = 1$$

vai

$$x = 1000, z = 4, w = 2$$

10. **Uzdevums:**

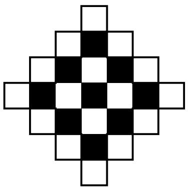
Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:



Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

Risinājums:

Nokrāsosim katru būrīti vai nu melnu, vai baltu kā šaha galdiņu (proti, nokrāsojam katram būrītim blakusesošo pretējā krāsā):



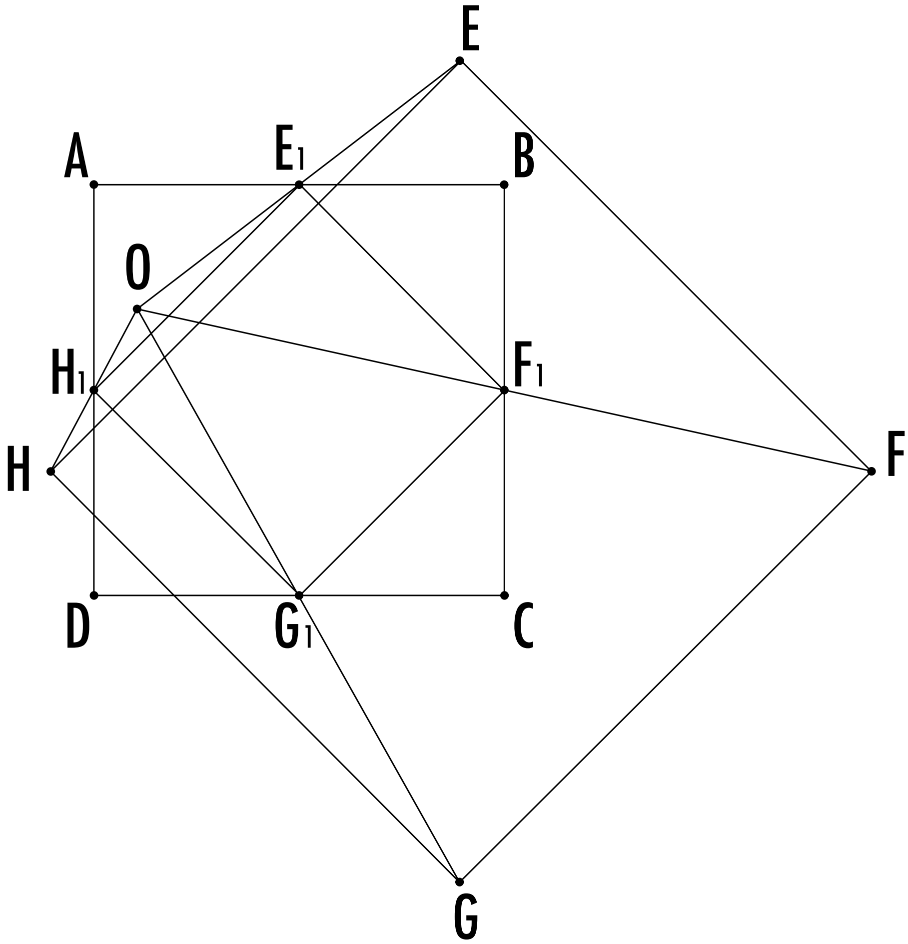
Ievērosim, ka no melna laucina vēzis var pāriet tikai uz baltu, un otrādāk. Turklāt, šajā krāsojumā ir 16 balti un 9 melni laucini. Tas nozīmē, ka pēc viena plaukstu sasitiena uz melnajiem būrīšiem varēs pāriet tikai maksimums 9 vēži, bet no melnajiem būrīšiem izies visi 16. Līdz ar to $16 - 9 = 7$ būrīši paliks tukši.

11. **Uzdevums:**

Kvadrāta $ABCD$ laukums ir S. Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts O. Punkti E, F, G, H ir simetriski punktam O attiecībā pret $ABCD$ malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra $EFGH$ laukumu!

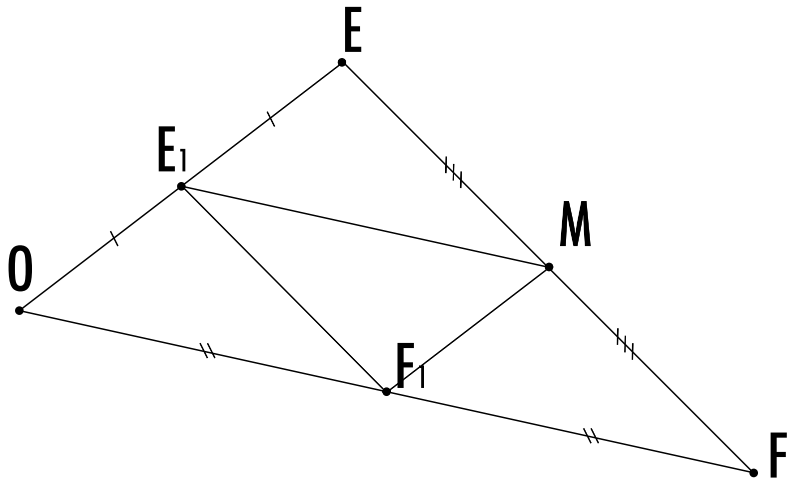
Risinājums:

Ievērosim, ka tā kā E_1, F_1, G_1, H_1 ir malu viduspunkti, tad $E_1F_1G_1H_1$ arī ir kvadrāts, turklāt tā laukums ir puse no $ABCD$ laukuma (To var viegli redzēt, piemēram, novelkot E_1G_1 un F_1H_1 un apskatot izveidojušos trijstūrus.



Dēļ simetriskās konstrukcijas $OE_1 = E_1E$, līdzīgi arī $OF_1 = F_1F$ un tamlīdzīgi.

Apskatīsim trijstūri OEF. Ievērosim, ka E_1F_1 ir šī trijstūra viduslīnija, un tā ir paralēla EF. Atliksim malas EF viduspunktu M un ievērosim, ka trijstūris OE_1F_1 vienāds ar trijstūri E_1EM, līdz ar to arī $E_1F_1 = EM$, tādēļ $EF = 2 \cdot AM = 2 \cdot E_1F_1$.



Līdzīgi, apskatot trijstūrus OFG, OGH un OHE, iegūstam, ka katra no $EFGH$ malām ir paralēla divas reizes lielāka par tai atbilstošo $E_1F_1G_1H_1$ malu, līdz ar to $EFGH$ arī ir kvadrāts, turklāt tā malas garums ir divas reizes lielāks.

No tā seko, ka $EFGH$ laukums ir četras reizes lielāks par $E_1F_1G_1H_1$ laukumu, kas ir puse no $ABCD$ laukuma, tādēļ, $EFGH$ laukums ir divas reizes lielāks par sākotnējā kvadrāta laukumu, jeb $2 \cdot S$.

12. **Uzdevums:**

Pierādīt, ka 2015! dalās ar 2016.

Pieraksts n! apzīmē visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājumu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *Piemēram,* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Risinājums:

Ievērosim, ka $2016 = 7 \cdot 288$, un $7 < 2015$, $288 < 2015$, līdz ar to, tā kā

$$2015! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2014 \cdot 2015$$

tad starp 2015! dalītājiem būs gan 7, gan 288, turklāt, tā kā tie ir savstarpēji pirmskaitļi, tad 2015! noteikti dalīsies ar $7 * 288 = 2016$.

13. **Uzdevums:**

Cirpis uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas bez atstarpēm un ieguva ļoti garu skaitli:

$$12345678910111213\ldots997998999$$

(a) Cik ciparu ir Cirpja skaitlim?

(b) Cik cipari skaitļa pierakstā ir vienādi ar 1?

(c) Cirpis uzraksta vēl vienu skaitli šādā pat veidā, tikai šoreiz izmanto skaitļus no 1 līdz $10^n - 1$. Cik ciparu jauniegūtajā skaitlī ir vienādi ar 1?

Risinājums:

(a) Ievērosim, ka skaitlī ir 9 viencipara skaitļi, 90 divciparu skaitļi, un 900 trīsciparu skaitļi, tādēļ kopā ir $1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 9 + 180 + 2700 = 2889$ cipari.

(b) Apskatīsim atsevišķi pirmos ciparus, otros ciparus un trešos ciparus katrā no skaitļiem no 0 līdz 999, turklāt, ja skaitlim nav otrā vai trešā cipara, tad iedomāsimies, ka tur ir 0: kā skaitļa pirmais cipars 1 ir katram desmitajam, un kopā ir 1000 skaitļu, līdz ar to ir 100 pirmo ciparu 1. Kā otrais cipars 1 ir desmit pēc kārtas sekojošiem skaitļiem, un šie skaitļi parādās reizi simtā, līdz ar to ir $1000 \cdot 10/100 = 100$ ar otro ciparu 1. Kā trešais cipars 1 parādās simts pēc kārtas sekojošiem skaitļiem, bet tikai reizi tūkstotī, līdz ar to ir $1000 \cdot 100/1000 = 100$ ar trešo ciparu 1. Tatad kopumā ir 300 ciparu 1.

(c) Pēc līdzīgas pieejas kā iepriekšējā punktā, iegūstam, ka 1 ir skaitļa k tais cipars 10^{k-1} pēc kārtas sekojošiem skaitļiem, bet šie skaitļi parādās reizi 10^k skaitļos, līdz ar to ir

$$10^n \cdot 10^{k-1}/10^k = 10^{n-1}$$

skaitļu, kuru k tais cipars ir 1. Tā kā ir n iespējamo cipara 1 pozīciju, tad ir

$$n \cdot 10^{n-1}$$

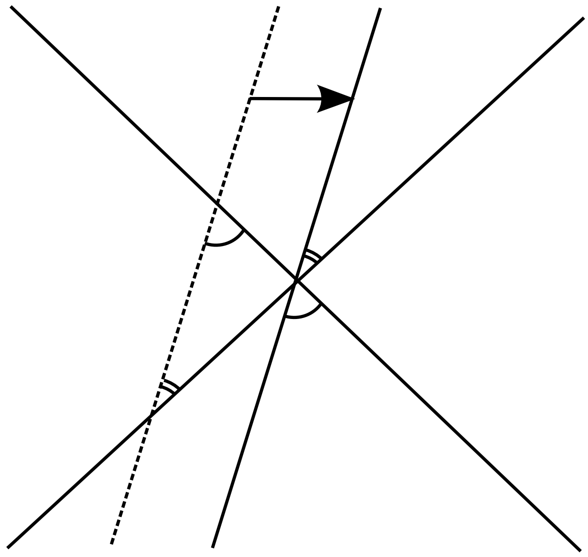
ciparu 1 šajā skaitlī.

14. **Uzdevums:**

Plaknē uzzīmētas 13 taisnes, un nekādas divas no tām nav paralēlas. Pierādīt, ka noteikti atradīsies divas tādas taisnes, kuras veidos leņķi, kas mazāks par 14 grādiem.

Risinājums:

Ievērosim, ka paralēli pārbīdot kādu no taisnēm, leņķis, ko tā veido ar jebkuru citu taisni paliek nemainīgs. Līdz ar to, mēs varam visas taisnes paralēli sabīdīt tā, lai tās krustotos vienā punktā.



Papildu, ja visas taisnes sabīda vienā punktā, tad iegūstam, ka caur punktu iziet 13 taisnes, jeb 26 stari. Starp katriem diviem blakusesošiem stariem izveidojas viens "mazais" leņķis. Visu šo "mazo" leņķu summa ir $360°$. Tā kā vidējais leņķa lielums ir $360°/26 = 13.8... < 14$, tad pēc Dirihlē principa, notiekti būs vismaz viens lenķis, kas ir mazāks vai vienāds par vidējo, un šis leņķis arī ir meklētais.

15. **Uzdevums:**

Elvijs burtnīcā pa vairākām lapām pierakstīja skaitļu un kastīšu virkni, kas sastāv no visiem skaitļiem no 1 līdz 2016, un starp katriem diviem skaitļiem uzzīmēja tukšu kastīti:

$$1\square 2\square 3\square 4\square \ldots \square 2015\square 2016$$

Elvijs aizvietoja katru kastīti ar vai nu $+$, vai − zīmi. Pēc tam, veicot nepieciešamās darbības, Elvijs ieguva rezultātu 1337. Pierādīt, ka Elvijs ir kļūdījies savos aprēķinos!

Risinājums:

Apskatīsim visu to skaitļu summu, kuriem priekšā ir pierakstīts "$+$" un apzīmēsim to ar x, tad apskatīsim visu to skaitļu summu, kuriem priekšā pierakstīts "-" un apzīmēsim to ar y. Tad $x - y = 1337$, kas ir nepāra skaitlis.

No otras puses, ja apmaina visas mīnus zīmes uz plus zīmēm, tad iegūstam, ka $x + y = 1 + 2 + 3 + ... + 2016$. Ievērosim, ka šajā summā parādās $2016/2 = 1008$ nepāra skaitļi un tikpat pāra skaitļi, līdz ar to, tā kā tiek saskaitīts pāra skaits nepāra skaitļu, tad iegūstam, ka $x + y$ arī ir pāra.

Bet tad iegūstam, ka divu skaitļu summa ir pāra skaitlis, bet starpība ir nepāra skaitlis, bet nav tādu veselu skaitļu, kas to apmierinātu. Līdz ar to Elvijs ir kļūdījies.