atvērtā kopa
2016

Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Visu uzdevumu kopsavilkums

Uzdevumi 7. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

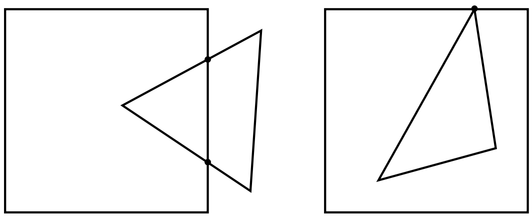
   五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Aija un Jānis spēlē sekojošu spēli: katrā gājienā ir iespējams izvēlēties un uzrakstīt kādu skaitli no 10 līdz 99 ieskaitot, vai arī pārbaudīt, vai divu skaitļu starpība dalās ar 10. Uzvar tas spēlētājs, kuram pirmajam izdodas atrast divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

   Ja Aija sāk, tad kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt, spēlējot pareizi?

3. Attēlos parādīts kvadrāts un trīsstūris, kuri krustojas attiecīgi divos un vienā punktā:

   Nosaki un parādi visas iespējas, cik krustpunktu var būt kvadrātam un trīsstūrim.

4. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" šķēli tā, lai 99 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šī maizes šķēle atbilst taisnstūrim ar izmēriem $1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes malu. Mūsu varoņi negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 99, ne obligāti vienādos, gabalos.

5. Kārlim un Annai ir jānopin kaut kāds skaits grozu, tomēr viņi negrib tev teikt, cik tieši grozi jānopin. Kārlis viens pats spēj nopīt visus nepieciešamos grozus 6 stundās. Ja Kārlis un Anna strādātu kopā, tad viņi šo grozu skaitu nopītu 2 stundās.

   Cik ilgā laikā Anna, strādājot viena pati, spētu nopīt to pašu grozu daudzumu?

6. Seši draugi sēž aplī, un katram uz galvas ir vai nu melna, vai balta cepure. Katrs no draugiem redz visu pārējo cepures, bet neredz savu. Turklāt, viņi visi zina, ka vismaz vienam cepure ir atšķirīgā krāsā no pārējo cepurēm.

   Pēc kāda brīža viens no viņiem saka: "Es nezinu, kādā krāsā ir mana cepure."

   Uz ko kāds cits atbild: "Tev ir melna cepure."

   Te pēkšņi, trešais iesaucas: "Iepriekš es nezināju, kādā krāsā ir mana cepure, bet tagad es zinu!"

   Kādā krāsā bija katra drauga cepure?

7. Pa virtuves grīdu ar nemainīgu ātrumu rāpo prusaks. Ik pēc 15s prusaks pagriezās 90 pa labi vai pa kreisi. Pēc kāda laika prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā. Pierādīt, ka prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā pēc vesela skaita minūšu (laiku, kas nepieciešams, lai prusaks pagrieztos, neņemt vērā)!

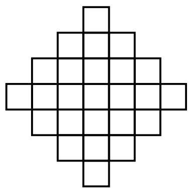
8. Mikum ir ļoti iepaticies skaitlis 42^{20}. Reiz viņš šo skaitli centās izprintēt, bet skaitļa devītais cipars netīšām izplūda par ■ simbolu:

   $$42^{20} = 291733167875766667063796\blacksquare 53374976$$

   Palīdzi Mikum atrast izplūdušo ciparu!

9. Atrast visus naturālus skaitļus x, z, w, ka $2x + 1z + 6w = 2016$ un $1z + 6w = 16$.

10. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:

    Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

11. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

    Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets. Arī Liedars vēlējās "izperēt"olu.

    Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 6283 m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 1 apli 1 minūtē. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

12. Pierādīt, ka 2015! dalās ar 2016.

    Pieraksts $n!$ apzīmē visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājumu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *Piemēram,* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

13. Cirpis uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas bez atstarpēm un ieguva ļoti garu skaitli:

$$12345678910111213\ldots997998999$$

   (a) Cik ciparu ir Cirpja skaitlim?
   (b) Cik cipari skaitļa pierakstā ir vienādi ar 1?
   (c) Cirpis uzraksta vēl vienu skaitli šādā pat veidā, tikai šoreiz izmanto skaitļus no 1 līdz $\underbrace{99\ldots999}_{n \text{ devītnieki}}$.

   Cik ciparu jauniegūtajā skaitlī ir vienādi ar 1?

14. Plaknē uzzīmētas 13 taisnes, un nekādas divas no tām nav paralēlas. Pierādīt, ka noteikti atradīsies divas tādas taisnes, kuras veidos leņķi, kas mazāks par 14 grādiem.

15. Elvijs burtnīcā pa vairākām lapām pierakstīja skaitļu un kastīšu virkni, kas sastāv no visiem skaitļiem no 1 līdz 2016, un starp katriem diviem skaitļiem uzzīmēja tukšu kastīti:

$$1\square 2\square 3\square 4\square \ldots \square 2015\square 2016$$

   Elvijs aizvietoja katru kastīti ar vai nu $+$, vai $-$ zīmi. Pēc tam, veicot nepieciešamās darbības, Elvijs ieguva rezultātu 1337. Pierādīt, ka Elvijs ir kļūdījies savos aprēķinos!

Uzdevumi 8. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

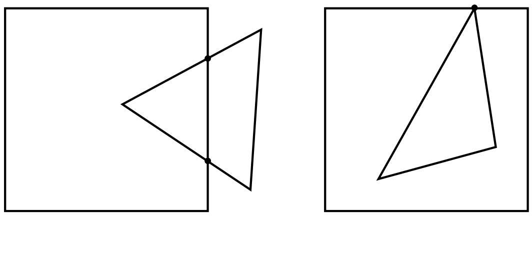
   五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Aija un Jānis spēlē sekojošu spēli: katrā gājienā ir iespējams izvēlēties un uzrakstīt kādu skaitli no 10 līdz 99 ieskaitot, vai arī pārbaudīt, vai divu skaitļu starpība dalās ar 10. Uzvar tas spēlētājs, kuram pirmajam izdodas atrast divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

   Ja Aija sāk, tad kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt, spēlējot pareizi?

3. Attēlos parādīts kvadrāts un trīsstūris, kuri krustojas attiecīgi divos un vienā punktā:



   Nosaki un parādi visas iespējas, cik krustpunktu var būt kvadrātam un trīsstūrim.

4. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt “Kungu maizes” šķēli tā, lai 99 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šī maizes šķēle atbilst taisnstūrim ar izmēriem 1x2. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes malu. Mūsu varoņi negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 99, ne obligāti vienādos, gabalos.

5. Kārlim un Annai ir jānopin kaut kāds skaits grozu, tomēr viņi negrib tev teikt, cik tieši grozi jānopin. Kārlis viens pats spēj nopīt visus nepieciešamos grozus 6 stundās. Ja Kārlis un Anna strādātu kopā, tad viņi šo grozu skaitu nopītu 2 stundās.

   Cik ilgā laikā Anna, strādājot viena pati, spētu nopīt to pašu grozu daudzumu?

6. Seši draugi sēž aplī, un katram uz galvas ir vai nu melna, vai balta cepure. Katrs no draugiem redz visu pārējo cepures, bet neredz savu. Turklāt, viņi visi zina, ka vismaz vienam cepure ir atšķirīgā krāsā no pārējo cepurēm.

   Pēc kāda brīža viens no viņiem saka: “Es nezinu, kādā krāsā ir mana cepure.”

   Uz ko kāds cits atbild: “Tev ir melna cepure.”

   Te pēkšņi, trešais iesaucas: “Iepriekš es nezināju, kādā krāsā ir mana cepure, bet tagad es zinu!”

   Kādā krāsā bija katra drauga cepure?

7. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles “Pokemon GO”. Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var “perēt” olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

   Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets. Arī Liedars vēlējās “izperēt” olu.

   Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 1 apli 1 minūtē. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

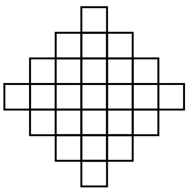
8. Mikum ir ļoti iepaticies skaitlis 42^{20}. Reiz viņš šo skaitli centās izprintēt, bet skaitļa devītais cipars netīšām izplūda par $\blacksquare$ simbolu:

   $$42^{20} = 29173316787576666706379 6\blacksquare 53374976$$

   Palīdzi Mikum atrast izplūdušo ciparu!

9. Atrast visus naturālus skaitļus x, z, w, ka $2x + 1z + 6w = 2016$ un $1z + 6w = 16$.

10. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:

    Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

11. Kvadrāta *ABCD* laukums ir *S*. Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts *O*. Punkti *E*, *F*, *G*, *H* ir simetriski punktam *O* attiecībā pret *ABCD* malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra *EFGH* laukumu!

12. Pierādīt, ka 2015! dalās ar 2016.

    Pieraksts $n!$ *apzīmē visu naturālo skaitļu no* 1 *līdz n ieskaitot reizinājumu:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *Piemēram,* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

13. Cirpis uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas bez atstarpēm un ieguva ļoti garu skaitli:

    $$12345678910111213\ldots997998999$$

    (a) Cik ciparu ir Cirpja skaitlim?

    (b) Cik cipari skaitļa pierakstā ir vienādi ar 1?

    (c) Cirpis uzraksta vēl vienu skaitli šādā pat veidā, tikai šoreiz izmanto skaitļus no 1 līdz $10^n - 1$. Cik ciparu jauniegūtajā skaitlī ir vienādi ar 1?

14. Plaknē uzzīmētas 13 taisnes, un nekādas divas no tām nav paralēlas. Pierādīt, ka noteikti atradīsies divas tādas taisnes, kuras veidos leņķi, kas mazāks par 14 grādiem.

15. Elvijs burtnīcā pa vairākām lapām pierakstīja skaitļu un kastīšu virkni, kas sastāv no visiem skaitļiem no 1 līdz 2016, un starp katriem diviem skaitļiem uzzīmēja tukšu kastīti:

    $$1\square 2\square 3\square 4\square\ldots\square 2015\square 2016$$

    Elvijs aizvietoja katru kastīti ar vai nu $+$, vai − zīmi. Pēc tam, veicot nepieciešamās darbības, Elvijs ieguva rezultātu 1337. Pierādīt, ka Elvijs ir kļūdījies savos aprēķinos!

Uzdevumi 9. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

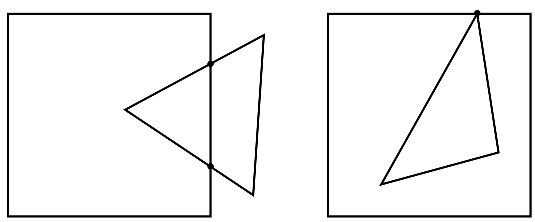
   五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

   Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Aija un Jānis spēlē sekojošu spēli: katrā gājienā ir iespējams izvēlēties un uzrakstīt kādu skaitli no 10 līdz 99 ieskaitot, vai arī pārbaudīt, vai divu skaitļu starpība dalās ar 10. Uzvar tas spēlētājs, kuram pirmajam izdodas atrast divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

   Ja Aija sāk, tad kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt, spēlējot pareizi?

3. Attēlos parādīts kvadrāts un trīsstūris, kuri krustojas attiecīgi divos un vienā punktā:



Nosaki un parādi visas iespējas, cik krustpunktu var būt kvadrātam un trīsstūrim.

4. Pierādīt, ka 2015! dalās ar 2016.

   Pieraksts $n!$ *apzīmē visu naturālo skaitļu no* 1 *līdz n ieskaitot reizinājumu:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. *Piemēram,* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

5. Uz tāfeles uzrakstīti visi veselie skaitļi no 1 līdz 2016 ieskaitot. Ar vienu gājienu ir iespējams izdzēst pirmos divus skaitļus un to summu pierakstīt virknes galā.

   (a) Cik gājieni nepieciešami, lai virknē paliktu tikai viens skaitlis?

   (b) Kādas vērtības var pieņemt šis skaitlis?

6. Plaknē uzzīmētas 44 taisnes, un nekādas divas no tām nav paralēlas. Pierādīt, ka noteikti atradīsies divas tādas taisnes, kuras veidos leņķi, kas mazāks par $4{,}2$ grādiem.

7. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

   Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets. Arī Liedars vēlējās "izperēt" olu.

   Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 1 apli 1 minūtē. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

8. Elvijs burtnīcā pa vairākām lapām pierakstīja skaitļu un kastīšu virkni, kas sastāv no visiem skaitļiem no 1 līdz 2016, un starp katriem diviem skaitļiem uzzīmēja tukšu kastīti:

   $$1\square 2\square 3\square 4\square \ldots \square 2015\square 2016$$

   Elvijs aizvietoja katru kastīti ar vai nu $+$, vai − zīmi. Pēc tam, veicot nepieciešamās darbības, Elvijs ieguva rezultātu 1337. Pierādīt, ka Elvijs ir kļūdījies savos aprēķinos!

9. Cirpis uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas bez atstarpēm un ieguva ļoti garu skaitli:

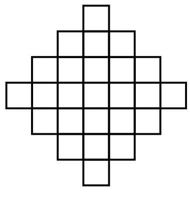
   $$12345678910111213\ldots 997998999$$

   (a) Cik ciparu ir Cirpja skaitlim?

   (b) Cik cipari skaitļa pierakstā ir vienādi ar 1?

   (c) Cirpis uzraksta vēl vienu skaitli šādā pat veidā, tikai šoreiz izmanto skaitļus no 1 līdz $10^n - 1$. Cik ciparu jauniegūtajā skaitlī ir vienādi ar 1?

10. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:



   Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

11. Kvadrāta *ABCD* laukums ir *S*. Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts *O*. Punkti *E*, *F*, *G*, *H* ir simetriski punktam *O* attiecībā pret *ABCD* malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra *EFGH* laukumu!

12. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

    Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

13. Zināms, ka x un y ir pozitīvi reāli skaitļi, un $x+y=1$. Pierādīt, ka

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$$

14. Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

15. Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3+c^2x+cx^2+x^3}+x=c$$

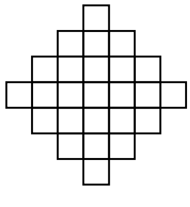
Uzdevumi 10. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

    五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

    Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:



    Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

3. Izliekta četrstūra $ABCD$ laukums ir S. Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts O. Punkti E, F, G, H ir simetriski punktam O attiecībā pret $ABCD$ malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra $EFGH$ laukumu!

4. Pa virtuves grīdu ar nemainīgu ātrumu rāpo prusaks. Ik pēc $15s$ prusaks pagriezās 90 pa labi vai pa kreisi. Pēc kāda laika prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā. Pierādīt, ka prusaks ir atgriezies savā sākuma punktā pēc vesela skaita minūšu (laiku, kas nepieciešams, lai prusaks pagrieztos, neņemt vērā)!

5. Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 2$ izpildās

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

6. Zole ir 3 spēlētāju spēle, kuru spēlē ar 26 dažādām kārtīm. Kārtis tiek izdalītas sekojoši: katram spēlētājam pa astoņām un divas tiek liktas "galdā".

   Aprēķināt, cik dažādi sākotnējie izdalījumi ir iespējami, ņemot vērā, ka kāršu secībai rokā un galdā nav nozīmes.

7. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

   Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets.

   Arī Liedars vēlējās "izperēt"olu. Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 3 apļus 2 minūtēs. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

8. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

9. Dota funkcija f, zināms, ka visiem pozitīviem x izpildās:

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

   Aprēķināt $f(2)$.

10. Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

11. Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Riņķa līnijas pieskare punktā B un malas AC pagarinājums krustojas punktā D. Zināms, ka leņķis $\angle CBO$ vienāds ar leņķi $\angle ABD$. Pierādīt, ka

$$AD + AO + OC < DB + CB$$

12. Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} + x = c$$

13. Zināms, ka x un y ir pozitīvi reāli skaitļi, un $x + y = 1$. Pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

14. Doti sekojošie nogriežņi:

- Nogrieznis DD_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC malu AB,
- Nogrieznis HH_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC augstumu no virsotnes A,
- Nogrieznis MM_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC mediānu no virsotnes B.

Nekas cits par trīsstūri nav zināms. Parādīt kā, izmantojot cirkuli, zīmuli un lineālu bez iedaļām, var uzkonstruēt trīsstūri ABC.

15. Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kam izpildās

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$$

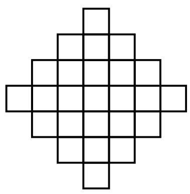
Uzdevumi 11. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

五 · 二＝十　　二 + 四＝六　　二 · 二＝四　　四 + 四 < 十

Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:



Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasit plaukstas, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

3. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles “Pokemon GO”. Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var “perēt” olas, un tās izšķiļas pie noteikta noietu kilometru daudzuma.

Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieto attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets.

Arī Liedars vēlējās “izperēt”olu. Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 3 apļus 2 minūtēs. Vai Liedara ola izšķilsies pēc 10 apļu noiešanas?

4. Eduards apgalvo, ka ir atradis tādu naturālu skaitli a, ka daļskaitli $\frac{6a+7}{9a+8}$ iespējams saīsināt. Pierādīt, ka Eduards melo.

5. Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 2$ izpildās

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

6. Zole ir 3 spēlētāju spēle, kuru spēlē ar 26 dažādām kārtīm. Kārtis tiek izdalītas sekojoši: katram spēlētājam pa astoņām un divas tiek liktas "galdā".

   Aprēķināt, cik dažādi sākotnējie izdalījumi ir iespējami, ņemot vērā, ka kāršu secībai rokā un galdā nav nozīmes.

7. Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir O. Riņķa līnijas pieskare punktā B un malas AC pagarinājums krustojas punktā D. Zināms, ka leņķis $\angle CBO$ vienāds ar leņķi $\angle ABD$. Pierādīt, ka

$$AD + AO + OC < DB + CB$$

8. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1x1x2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.

   Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

9. Dota funkcija f, zināms, ka visiem pozitīviem x, kas nav vienādi ar 1 vai 0, izpildās:

$$f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x^2$$

   Aprēķināt $f(2)$.

10. Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (naids ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.

11. Doti sekojošie nogriežņi:

    - Nogrieznis DD_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC malu AB,
    - Nogrieznis HH_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC augstumu no virsotnes A,
    - Nogrieznis MM_1, kas vienāds ar trīsstūra ABC mediānu no virsotnes B.

    Nekas cits par trīsstūri nav zināms. Parādīt kā, izmantojot cirkuli, zīmuli un lineālu bez iedaļām, var uzkonstruēt trīsstūri ABC.

12. Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c, ka

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} + x = c$$

13. Zināms, ka $a_1, a_2 \ldots a_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi, un $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$$

14. Aleksejs paņem bezgalīgi lielu rūtiņu lapu un sāk iekrāsot rūtiņas tā, ka katrai iekrāsotajai rūtiņa ir kopīga mala ar kādu citu iepriekš iekrāsotu rūtiņu (izņemot pirmajai rūtiņai, ko viņš iekrāso).

    Kad Aleksejs ir beidzis zīmēt, viņš ievēro, ka ir iekrāsojis tieši 2016 rūtiņas un ka visas iekrāsotās figūras perimetrs ir 4034.

    Pierādīt, ka no jebkuras iekrāsotās rūtiņas uz jebkuru citu var nonākt tikai vienā veidā, ja pārvietojas starp iekrāsotajām rūtiņām, šķērsojot tikai malas (nevis stūrus), un neapmeklējot nevienu rūtiņu divreiz.

15. Cik ir tādu naturālu skaitļu pāru (x, y), kam izpildās

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2016}$$