Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

7. klases atrisinājumi

1. Nevar. Visu nogriežņu garumu summa ir 36 cm, tātad katram no trim nogriežņiem ir jābūt 12 cm gariem. Taču, piemēram, 10 cm garo nogriezni nevar salikt kopā ar nevienu no dotajiem (jebkādā kombinācijā), lai kopējais garums būtu 12 cm.

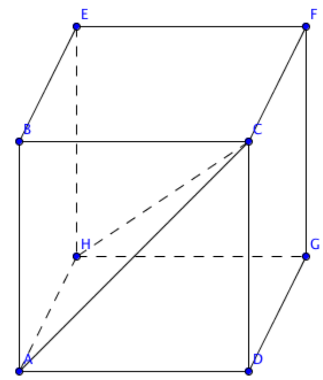
2. Apskatīsim punktu C. No tā var novilkt nogriežņus uz

a) B, D, F, kas sakrīt ar kuba malām, tātad ir vienādi,

b) A, E, G, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonāli, tātad ir vienādi,

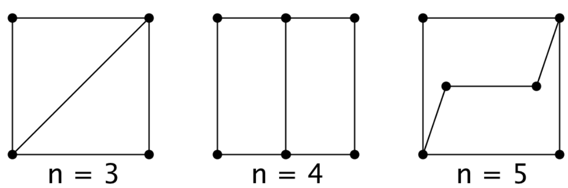
c) H, kas veido kvadrāta diagonāli.

Pārējiem punktiem situācija būs tāda pati (var novilkt trīs nogriežņus, kas sakrīt ar malām, trīs, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonālēm, un vienu kuba diagonāli). Tātad var novilkt trīs dažāda garuma nogriežņus, kuru galapunkti atrodas kuba virsotnēs.



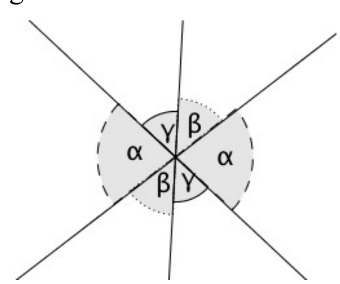
3. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{29}$, c) $\frac{2}{2n+1}$. c atbilde iegūta $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$ pārveidojot par $\frac{2}{2n}$ un $\frac{2}{2n+2}$.

4.



5. Lai taisnstūra kontūru sagrieztu 3 daļās, ir nepieciešamas 3 griezuma vietas. Tā kā taisnstūra kontūra veido 4 taisnus leņķus, tad vismaz viens taisns leņķis netiks sagriezts. Ja vismaz vienā figūrā būs taisns leņķis, tad arī pārējās jābūt pa taisnam leņķim. Tātad 3 taisnie leņķi netiks sagriezti, bet tieši viens tiks sagriezts (griezums atrodas uz taisnstūra stūra). Attiecīgi 2 atlikušie griezumi atrodas katrs uz savas malas (ja šie 2 griezumi ir uz vienas malas, tad viena no figūrām būs nogrieznis bez taisna leņķa), tad divās no figūrām ir pa vienai nesagrieztai malai, bet trešajā figūrā nav nevienas nesagrieztas malas. Tātad šīs figūras nav vienādas savā starpā.

6. Krustojoties trīs taisnēm, izveidojas trīs dažāda lieluma leņķi, kuru summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Pieņemsim pretējo – neviens no šiem leņķiem nepārsniedz 60°. Tādā gadījumā $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viens no leņķiem ir vismaz 60° liels.



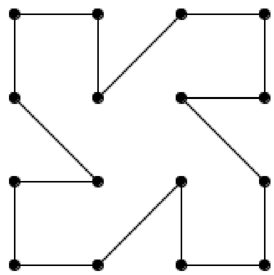
7. Skat. zīmējumu Nr. 1.

8. Skat. zīmējumu Nr. 2.

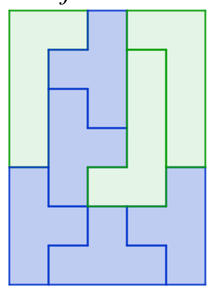
9. Andjikam atrodoties a-tajā aplī, sacensību līderis tam bija b apļus priekšā. Tātad līderis atradās (a+b)-tajā aplī. Skaidrs, ka līderis nevarēja būt nobraucis vairāk apļus, kā paredzēts sacensībās, tādēļ $a+b\leq 11$ un maksimālā a+b vērtība ir 11.

10. a) Skat. zīmējumu Nr. 3. b) skat. zīmējumu Nr. 4.

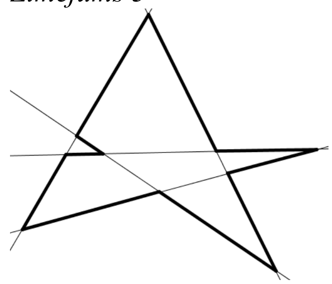
Zīmējums 1



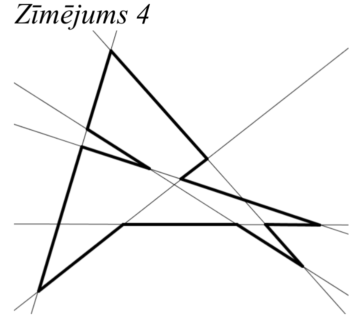
Zīmējums 2



Zīmējums 3



Zīmējums 4



11. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ

$V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$. Analogi,

zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka

$\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka

brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

12. Pieņemsim, ka uzdevuma prasības var panākt ieejot telpā 2 reizes. Tad ievērosim, ka, lai noskaidrotu, kuras spuldzītes ieslēdz slēdži, kas ieslēdz tikai pa vienai spuldzītei (sauksim šos slēdžus par vieniniekiem), ir nepieciešamas vismaz 2 slēgšanas/telpas apskates reizes, kura katrā no reizēm ir nomainīts stāvoklis tieši vienam no vieniniekiem (sec. 1)*. Lai ar vienu slēgšanu atrastu, kuras spuldzītes ieslēdz divnieki (slēdži, kuri ieslēdz divas spuldzītes), vienā no slēgšanas reizēm ir jānomaina stāvoklis tikai un vienīgi vienam divnieku slēdzim, kas ir pretrunā ar mūsu iepriekšējo secinājumu (skat. sec. 1.). Tātad vienā no slēgšanas reizēm būs ieslēgts tieši viens divnieks un viens vieninieks (sec. 2). Skaidrs, ka šajā reizē, nevarēs noskaidrot, kuras tieši spuldzītes ieslēdz ieslēgtais divnieks. Tātad arī otrajā reizē būs ieslēgts viens no divniekiem (var pieņemt, ka tas būs tas pats divnieks) un, balsoties uz sec. 1, arī viens no vieniniekiem. Bet gadījumā, kad katram no vieniniekiem nomainot stāvokli, tiek izslēgta kāda no divnieka ieslēgtajām spuldzītēm, tad abās slēgšanas reizēs būs ieslēgta tieši viena spuldzīte, kas neļaus mums noteikt, kuri slēdži ieslēdz kuras spuldzītes. Tātad ir nepieciešamas 3 telpas pārbaudes reizes.

Lai atrastu visām spuldzītēm slēdžus, kuri tās ieslēdz, ar 3 telpas apmeklējuma reizēm, pirmajā ieslēdz tikai pirmo vieninieku un atrod spuldzīti, kuru tas ieslēdz, analogi otrajā reizē ieslēdz tikai otro vieninieku, trešajā reizē ieslēdz vienu no divniekiem, noskaidrojot, kuras spuldzītes tas ieslēdz, bet neieslēgtas spuldzītes ieslēdz otrs divnieks.

*Ar 2 slēgšanas reizēm var pietikt arī tad,ja vienā no reizēm ir ieslēgti abi vieninieki un otra reizē tikai viens vieninieks. Skaidrs, ka šajā gadījumā arvien būs spēkā sec. 2. Bet tad, ja reizē, kad ir nomainīts stāvoklis divniekam, vieninieks izslēdz vienu no divniekam spuldzītēm, otrajā reizē esot ieslēgtiem abiem vieniniekiem, nespēsim noteikt, kurš no vieniniekiem, izslēdza vienu no dotā divnieka ieslēgtajām spuldzītēm.

13. Pirmkārt, redzam, ka 2., 3. un 4. skolēnam kopā ir 4 punkti un starp iekrāsotajām atbildēm a) arī ir 4 punkti, tātad 5., 6. un 7. jautājumā pareizās atbildes ir attiecīgi a, c un b. Tālāk skatāmies tabulu ar tikai pirmajiem 4 jautājumiem b). Šajā tabulā redzam, ka 4., 5. un 8. skolēniem kopā ir 6 punkti, turklāt 3. jautājumā ir kopā ir 1 punkts un 2. jautājumā – 0, 1 vai 2 punkti, savukārt 1. un 4. - 0 vai 3 punkti. Vienīgais variants, lai kopā sanāktu 6 punkti, ir, ja 2. jautājumā ir 2 punkti, tātad pareizā atbilde ir c. Iegūstam c) tabulu, kur redzams, ka no atlikušajiem jautājumiem jāiegūst 9 punkti. d) tabulā norādīts punktu skaits, kāds būtu katrā jautājumā, ja atbilstošā atbilde būtu pareiza. Šo punktu summai jābūt vienādai ar 9. Šiem kritērijiem atbilst varianti aba, abc, bba, bbc un ccb. Pēc izslēgšanas metodes (piemēram, aba un bba neder, jo tad 1. skolēnam būtu 2 punkti) atrodam vienīgo pareizo variantu – abc. Tātad pareizās atbildes pēc kārtas ir **a, c, b, c, a, c, b**.

a)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes							P
	1	2	3	4	5	6	7	
1	c	b	b	a	c	c	c	2
2	b	a	b	a	b	b	c	1
3	c	b	c	c	b	b	c	1
4	a	c	a	b	c	a	a	2
5	a	b	b	b	c	c	c	3
6	b	a	b	b	a	c	b	4
7	b	b	c	c	a	b	c	2
8	a	c	c	b	a	c	a	4

b)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes				P
	1	2	3	4	
1	c	b	b	a	1
2	b	a	b	a	1
3	c	b	c	c	1
4	a	c	a	b	2
5	a	b	b	b	2
6	b	a	b	b	1
7	b	b	c	c	1
8	a	c	c	b	2

c)

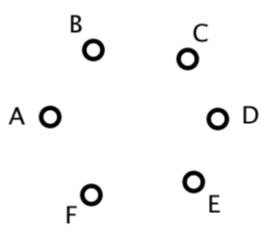
Sk. Nr.	Skolēnu atbildes			P
	1	3	4	
1	c	b	a	1
2	b	b	a	1
3	c	c	c	1
4	a	a	b	1
5	a	b	b	2
6	b	b	b	1
7	b	c	c	1
8	a	c	b	1

d)

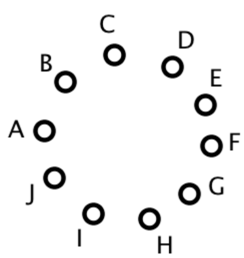
	1	**3**	**4**
a	3	1	2
b	3	4	4
c	2	3	2

14. a variantā, neatkarīgi no norādītās monētas, apgriezt var tikai tai diametrāli pretējo monētu. Tātad, ja kāda monēta ir apgriezta, tai diametrāli pretējo monētu nevar apgriezt. Tātad neapgrieztas paliks vismaz trīs monētas. Apgriezt trīs monētas var, piemēram, norādot uz A, B, C un attiecīgi apgriežot D, E, F. Šajā gadījumā Zane nevar uzvarēt.

b variantā Zane var norādīt uz A un apgriezt D (A→D), H→A, E→H, B→E, I→B, F→I, C→F, J→C, G→J. Palikusi neapgriezta tikai viena monēta, tātad Zane var dabūt tēju.



b)



15. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdi atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar 7, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti 6 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā 5 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa 7 atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar 7. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar 7 un tam nav neviena kopīga dalītāja ar 7, tad $(x-y)$ dalās ar 7, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par 7, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

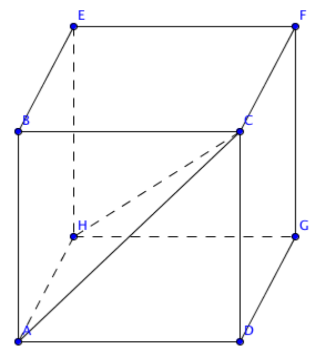
8. klases atrisinājumi

1. Nevar. Visu nogriežņu garumu summa ir 36 cm, tātad katram no trim nogriežņiem ir jābūt 12 cm gariem. Taču, piemēram, 10 cm garo nogriezni nevar salikt kopā ar nevienu no dotajiem (jebkādā kombinācijā), lai kopējais garums būtu 12 cm.

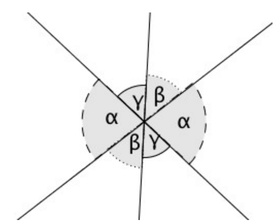
2. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{29}$, c) $\frac{2}{2n+1}$. (c) atbilde iegūta $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$ pārveidojot par $\frac{2}{2n}$ un $\frac{2}{2n+2}$.

3. Apskatīsim punktu C. No tā var novilkt nogriežņus uz
   a) B, D, F, kas sakrīt ar kuba malām, tātad ir vienādi,
   b) A, E, G, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonāli, tātad ir vienādi,
   c) H, kas veido kvadrāta diagonāli.

   Pārējiem punktiem situācija būs tāda pati (var novilkt trīs nogriežņus, kas sakrīt ar malām, trīs, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonālēm, un vienu kuba diagonāli). Tātad var novilkt trīs dažāda garuma nogriežņus, kuru galapunkti atrodas kuba virsotnēs.



4. Krustojoties trīs taisnēm, izveidojas trīs dažāda lieluma leņķi, kuru summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Pieņemsim pretējo – neviens no šiem leņķiem nepārsniedz 60°. Tādā gadījumā $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viens no leņķiem ir vismaz 60° liels.

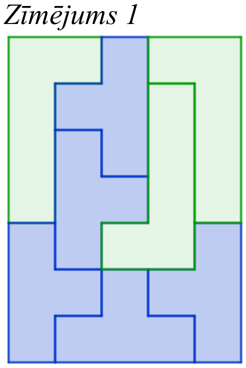


5. Skat. zīmējumu Nr. 1.

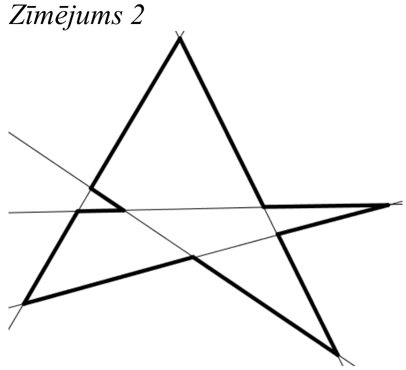
6. Andjikam atrodoties a-tajā aplī, sacensību līderis tam bija b apļus priekšā. Tātad līderis atradās (a+b)-tajā aplī. Skaidrs, ka līderis nevarēja būt nobraucis vairāk apļus, kā paredzēts sacensībās, tādēļ $a+b\leq 11$ un maksimālā a+b vērtība ir 11.

7. a) Skat. zīmējumu Nr. 2. b) skat. zīmējumu Nr. 3.

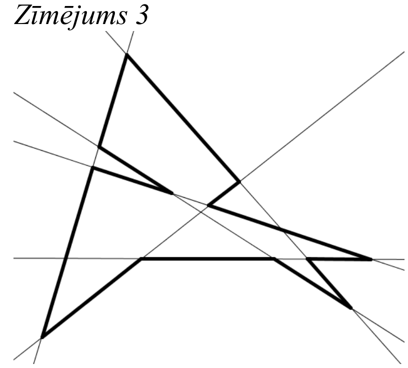
Zīmējums 1



Zīmējums 2



Zīmējums 3



8. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

9. Pieņemsim, ka uzdevuma prasības var panākt ieejot telpā 2 reizes. Tad ievērosim, ka, lai noskaidrotu, kuras spuldzītes ieslēdz slēdži, kas ieslēdz tikai pa vienai spuldzītei (sauksim šos slēdžus par vieniniekiem), ir nepieciešamas vismaz 2 slēgšanas/telpas apskates reizes, kura katrā no reizēm ir nomainīts stāvoklis tieši vienam no vieniniekiem (sec. 1)*. Lai ar vienu slēgšanu atrastu, kuras spuldzītes ieslēdz divnieki (slēdži, kuri ieslēdz divas spuldzītes), vienā no slēgšanas reizēm ir jānomaina stāvoklis tikai un vienīgi vienam divnieku slēdzim, kas ir pretrunā ar mūsu iepriekšējo secinājumu (skat. sec. 1.). Tātad vienā no slēgšanas reizēm būs ieslēgts tieši viens divnieks un viens vieninieks (sec. 2). Skaidrs, ka šajā reizē, nevarēs noskaidrot, kuras tieši spuldzītes ieslēdz ieslēgtais divnieks. Tātad arī otrajā reizē būs ieslēgts viens no divniekiem (var pieņemt, ka tas būs tas pats divnieks) un, balsoties uz sec. 1, arī viens no vieniniekiem. Bet gadījumā, kad katram no vieniniekiem nomainot stāvokli, tiek izslēgta kāda no divnieka ieslēgtajām spuldzītēm, tad abās slēgšanas reizēs būs ieslēgta tieši viena spuldzīte, kas neļaus mums noteikt, kuri slēdži ieslēdz kuras spuldzītes. Tātad ir nepieciešamas 3 telpas pārbaudes reizes.

Lai atrastu visām spuldzītēm slēdžus, kuri tās ieslēdz, ar 3 telpas apmeklējuma reizēm, pirmajā ieslēdz tikai pirmo vieninieku un atrod spuldzīti, kuru tas ieslēdz, analogi otrajā reizē ieslēdz tikai otro vieninieku, trešajā reizē ieslēdz vienu no divniekiem, noskaidrojot, kuras spuldzītes tas ieslēdz, bet neieslēgtas spuldzītes ieslēdz otrs divnieks.

*Ar 2 slēgšanas reizēm var pietikt arī tad,ja vienā no reizēm ir ieslēgti abi vieninieki un otra reizē tikai viens vieninieks. Skaidrs, ka šajā gadījumā arvien būs spēkā sec. 2. Bet tad, ja reizē, kad ir nomainīts stāvoklis divniekam, vieninieks izslēdz vienu no divniekam spuldzītēm, otrajā reizē esot ieslēgtiem abiem vieniniekiem, nespēsim noteikt, kurš no vieniniekiem, izslēdza vienu no dotā divnieka ieslēgtajām spuldzītēm.

10. $2abc \overset{?}{>} a^3 - ab^2 - ac^2 \,|: a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)
$2bc \overset{?}{>} a^2 - b^2 - c^2$
$b^2 + 2bc + c^2 \overset{?}{>} a^2$
$(b+c)^2 \overset{?}{>} a^2$
$b + c \overset{?}{>} a$ (pēc trijstūra nevienādības)

11. Pirmkārt, redzam, ka 2., 3. un 4. skolēnam kopā ir 4 punkti un starp iekrāsotajām atbildēm a) arī ir 4 punkti, tātad 5., 6. un 7. jautājumā pareizās atbildes ir attiecīgi a, c un b. Tālāk skatāmies tabulu ar tikai pirmajiem 4 jautājumiem b). Šajā tabulā redzam, ka 4., 5. un 8. skolēniem kopā ir 6 punkti, turklāt 3. jautājumā ir kopā ir 1 punkts un 2. jautājumā – 0, 1 vai 2 punkti, savukārt 1. un 4. - 0 vai 3 punkti. Vienīgais variants, lai kopā sanāktu 6 punkti, ir, ja 2. jautājumā ir 2 punkti, tātad pareizā atbilde ir c. Iegūstam c) tabulu, kur redzams, ka no atlikušajiem jautājumiem jāiegūst 9 punkti. d) tabulā norādīts punktu skaits, kāds būtu katrā jautājumā, ja atbilstošā atbilde būtu pareiza. Šo punktu summai jābūt vienādai ar 9. Šiem kritērijiem atbilst varianti aba, abc, bba, bbc un ccb. Pēc izslēgšanas metodes (piemēram, aba un bba neder, jo tad 1. skolēnam būtu 2 punkti) atrodam vienīgo pareizo variantu – abc. Tātad pareizās atbildes pēc kārtas ir a, c, b, c, a, c, b.

a)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes							P
	1	2	3	4	5	6	7	
1	c	b	b	a	c	c	c	2
2	b	a	b	a	b	b	c	1
3	c	b	c	c	b	b	c	1
4	a	c	a	b	c	a	a	2
5	a	b	b	b	c	c	c	3
6	b	a	b	b	a	c	b	4
7	b	b	c	c	a	b	c	2
8	a	c	c	b	a	c	a	4

b)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes				P
	1	2	3	4	
1	c	b	b	a	1
2	b	a	b	a	1
3	c	b	c	c	1
4	a	c	a	b	2
5	a	b	b	b	2
6	b	a	b	b	1
7	b	b	c	c	1
8	a	c	c	b	2

c)

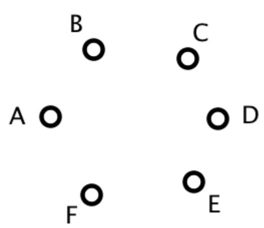
Sk. Nr.	Skolēnu atbildes			P
	1	3	4	
1	c	b	a	1
2	b	b	a	1
3	c	c	c	1
4	a	a	b	1
5	a	b	b	2
6	b	b	b	1
7	b	c	c	1
8	a	c	b	1

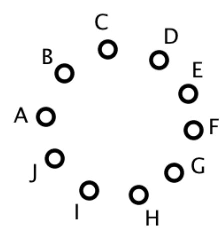
d)

	1	3	4
a	3	1	2
b	3	4	4
c	2	3	2

12. a variantā, neatkarīgi no norādītās monētas, apgriezt var tikai tai diametrāli pretējo monētu. Tātad, ja kāda monēta ir apgriezta, tai diametrāli pretējo monētu nevar apgriezt. Tātad neapgrieztas paliks vismaz trīs monētas. Apgriezt trīs monētas var, piemēram, norādot uz A, B, C un attiecīgi apgriežot D, E, F. Šajā gadījumā Zane nevar uzvarēt.

b variantā Zane var norādīt uz A un apgriezt D (A→D), H→A, E→H, B→E, I→B, F→I, C→F, J→C, G→J. Palikusi neapgriezta tikai viena monēta, tātad Zane var dabūt tēju.

a) 

b) 

13. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \leq 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

14. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdī atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar 7, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti 6 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā 5 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa 7 atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar 7. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar 7 un tam nav neviena kopīga dalītāja ar 7, tad $(x-y)$ dalās ar 7, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par 7, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

15. Atverot abās nevienādības pusēs iekavas, iegūstam

$$a^3+abc+a^2b+b^2c<2\mathrm{a}^3+2\mathrm{b}^2c\ ,$$

ko pārveidojam par

$$a^3-abc+b^2c-a^2b>0$$
$$a(a^2-bc)-b(a^2-bc)>0$$
$$(a^2-bc)(a-b)>0$$

No dotā $a>b\Rightarrow a-b>0$ un $a>b>0, a>c>0\Rightarrow a^2>bc\Rightarrow a^2-bc>0$, tādēļ iegūtā nevienādība $(a^2-bc)(a-b)>0$ arī ir spēkā.

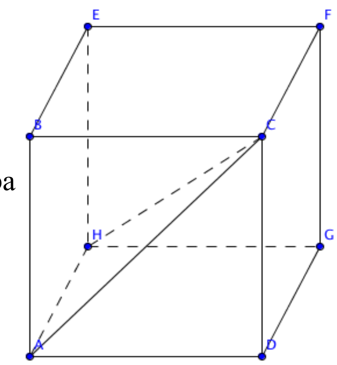
* Uzdevumā nebija precīzi norādīts, ka $a>b>c>0$.

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

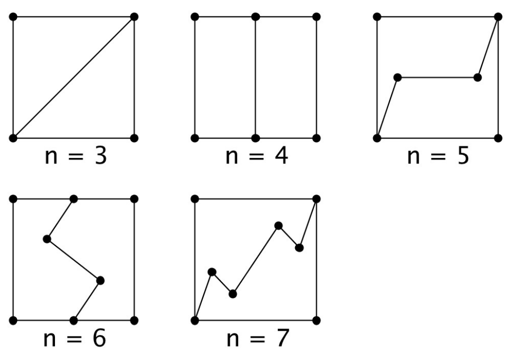
9. klases atrisinājumi

1. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{29}$, c) $\frac{2}{2n+1}$. (c) atbilde iegūta $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$ pārveidojot par $\frac{2}{2n}$ un $\frac{2}{2n+2}$.

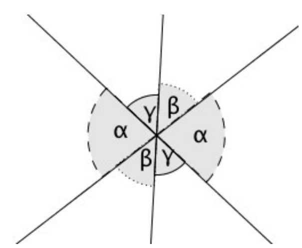
2. Apskatīsim punktu C. No tā var novilkt nogriežņus uz
a) B, D, F, kas sakrīt ar kuba malām, tātad ir vienādi,
b) A, E, G, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonāli, tātad ir vienādi,
c) H, kas veido kvadrāta diagonāli.
Pārējiem punktiem situācija būs tāda pati (var novilkt trīs nogriežņus, kas sakrīt ar malām, trīs, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonālēm, un vienu kuba diagonāli). Tātad var novilkt trīs dažāda garuma nogriežņus, kuru galapunkti atrodas kuba virsotnēs.



3.

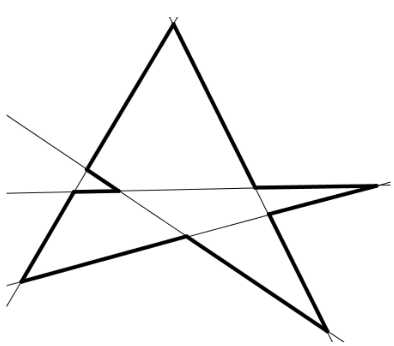


4. Krustojoties trīs taisnēm, izveidojas trīs dažāda lieluma leņķi, kuru summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Pieņemsim pretējo – neviens no šiem leņķiem nepārsniedz 60°. Tādā gadījumā $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viens no leņķiem ir vismaz 60° liels.

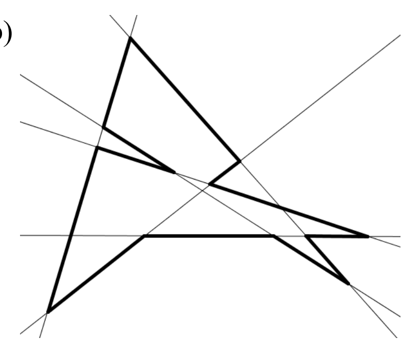


5. Andjikam atrodoties a-tajā aplī, sacensību līderis tam bija b apļus priekšā. Tātad līderis atradās (a+b)-tajā aplī. Skaidrs, ka līderis nevarēja būt nobraucis vairāk apļus, kā paredzēts sacensībās, tādēļ $a+b\leq 11$ un maksimālā a+b vērtība ir 11.

6. a)



b)



7. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A=\frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B=\frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B}=\frac{1000}{800}$. Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C}=\frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B}\cdot\frac{V_B}{V_C}=\frac{V_A}{V_C}=\frac{1000\cdot 1000}{800\cdot 700}=\frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

8. Ja $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n dalītāji sakārtoti augošā secībā, tad $d_1=\frac{n}{d_k}$, $d_2=\frac{n}{d_{k-1}}$, ..., $d_k=\frac{n}{d_1}$. Tātad dotais vienādojums ir spēkā visiem n.

9. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2=q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q.
Iegūstam:

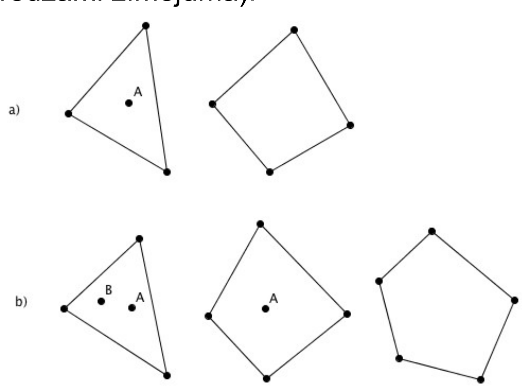
$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p=1$ (līdz ar to $q=q$), vai $q=0$ ($p\cdot 0=0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

10. Savienojam punktus tā, lai izveidotu lielāko iespējamo daudzstūri (iespējamie izkārtojumi redzami zīmējumā).



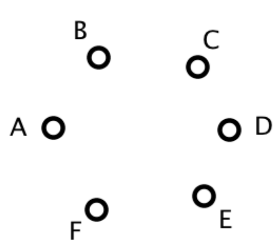
a) 1. gadījumā veidojas trīs leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas (jebkura šo leņķu summa būs lielāka par leņķiem, kas to veido). Mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi trīs leņķi ir vienādi, tātad 120°. Trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir vienādmalu trijstūra gadījumā, tātad 60°. Taču katru no šiem leņķiem dala stars, kas iet no virsotnes caur punktu A. Tātad 1. gadījumā mazāka leņķa maksimālā vērtība ir 30°. Otrajā gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četrstūra leņķi ir vienādi, t.i. 90°. Katru no tiem dala stars, kas iet no virsotnes uz pretēju virsotni, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība 2. gadījumā ir 45°. Tātad a piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 45°.

b) 1. gadījumā ir četri leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas, un četri – ar virsotni punktā B. To mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četri leņķi ir vienādi, tātad 90°. Tāpat arī otrajā gadījumā.

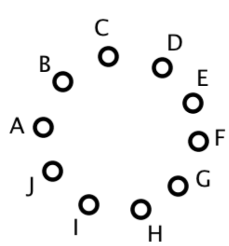
1. gadījumā trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 60°, taču to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 20°. 2. gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 90°, taču arī to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 30°. 3. gadījumā piecstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108°, to dala divi stari, tātad b piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108° : 3 = 36°.

11. a) neatkarīgi no norādītās monētas, apgriezt var tikai tai diametrāli pretējo monētu. Tātad, ja kāda monēta ir apgriezta, tai diametrāli pretējo monētu nevar apgriezt. Tātad neapgrieztas paliks vismaz trīs monētas. Apgriezt trīs monētas var, piemēram, norādot uz A, B, C un attiecīgi apgriežot D, E, F. Šajā gadījumā Zane nevar uzvarēt.

b) Zane var norādīt uz A un apgriezt D (A→D), H→A, E→H, B→E, I→B, F→I, C→F, J→C, G→J. Palikusi neapgriezta tikai viena monēta, tātad Zane var dabūt tēju.



a)



b)

12. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \leq 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

13. Varam pārveidot doto nevienādību, atverot iekavas:

$$a^2+b^2+c^2+2\mathrm{ab}+2\mathrm{ac}+2\mathrm{bc}\le 3\mathrm{a}^2+3\mathrm{b}^2+3\mathrm{c}^2$$

Turpinām pārveidot

$$2\mathrm{a}^2+2\mathrm{b}^2+2\mathrm{c}^2-2\mathrm{ab}-2\mathrm{ac}-2\mathrm{bc}\ge 0$$
$$a^2-2\mathrm{ab}+b^2+a^2-2\mathrm{ac}+c^2+b^2-2\mathrm{bc}+c^2\ge 0$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$$

Šī nevienādība ir spēkā, jo jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

14. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdi atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar 7, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti 6 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā 5 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa 7 atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar 7. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar 7 un tam nav neviena kopīga dalītāja ar 7, tad $(x-y)$ dalās ar 7, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par 7, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

15. Atverot abās nevienādības pusēs iekavas, iegūstam

$$a^3+abc+a^2b+b^2c<2\mathrm{a}^3+2\mathrm{b}^2c\,,$$

ko pārveidojam par

$$a^3-abc+b^2c-a^2b>0$$
$$a(a^2-bc)-b(a^2-bc)>0$$
$$(a^2-bc)(a-b)>0$$

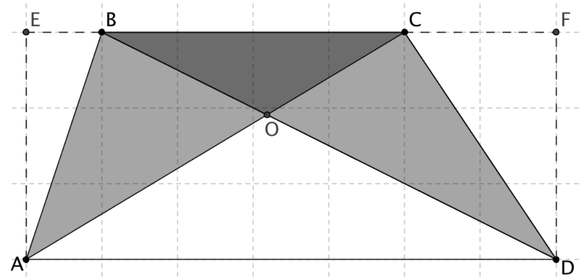
No dotā $a>b\Rightarrow a-b>0$ un $a>b>0, a>c>0\Rightarrow a^2>bc\Rightarrow a^2-bc>0$, tādēļ iegūtā nevienādība $(a^2-bc)(a-b)>0$ arī ir spēkā.

* Uzdevumā nebija precīzi norādīts, ka $a>b>c>0$.

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

10. klases atrisinājumi

1. Apskatām variantu, kad AD, BC – pamati. Novelk perpendikulus AE un DF pret taisni BC.



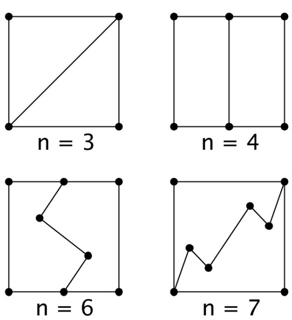
$AE = DF = h$ (taisnstūra pretējās malas)

$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = S(DBC)$

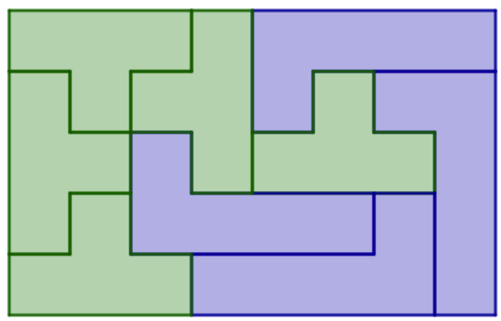
$S(ABC) - S(BOC) = S(DBC) - S(BOC)$

$S(ABO) = S(DCO)$

Gadījumā, ja trapeces pamati ir AB un CD, prasītie trijstūri nav vienādi.



Zīmējums 1



Zīmējums 2

2. Skat. zīmējumu Nr. 1.

3. Skat. zīmējumu Nr. 2.

4. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

5. Ja $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n dalītāji sakārtoti augošā secībā, tad

$d_1 = \frac{n}{d_k}, d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}, \ldots, d_k = \frac{n}{d_1}$. Tātad dotais vienādojums ir spēkā visiem n.

6. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2=q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q. Iegūstam:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p=1$ (līdz ar to $q=q$), vai $q=0$ ($p\cdot 0=0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

7. $2\text{abc} \overset{?}{>} a^3-ab^2-ac^2 \,|: a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)

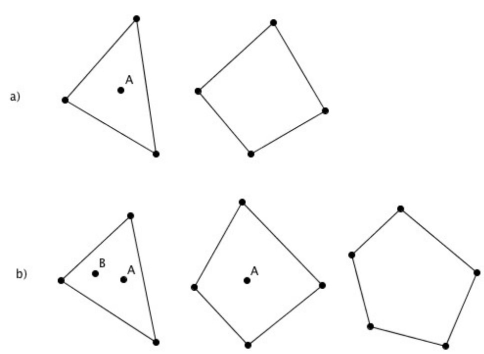
$2\text{bc} \overset{?}{>} a^2-b^2-c^2$

$b^2+2\text{bc}+c^2 \overset{?}{>} a^2$

$(b+c)^2 \overset{?}{>} a^2$

$b+c \overset{?}{>} a$ (pēc trijstūra nevienādības)

8. Savienojam punktus tā, lai izveidotu lielāko iespējamo daudzstūri (iespējamie izkārtojumi redzami zīmējumā).



a) 1. gadījumā veidojas trīs leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas (jebkura šo leņķu summa būs lielāka par leņķiem, kas to veido). Mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi trīs leņķi ir vienādi, tātad 120°. Trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir vienādmalu trijstūra gadījumā, tātad 60°. Taču katru no šiem leņķiem dala stars, kas iet no virsotnes caur punktu A. Tātad 1. gadījumā mazāka leņķa maksimālā vērtība ir 30°. Otrajā gadījumā četrstūra mazākā leņka maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četrstūra leņķi ir vienādi, t.i. 90°. Katru no tiem dala stars, kas iet no virsotnes uz pretēju virsotni, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība 2. gadījumā ir 45°. Tātad a piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 45°.

b) 1. gadījumā ir četri leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas, un četri – ar virsotni punktā B. To mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četri leņķi ir vienādi, tātad 90°. Tāpat arī otrajā gadījumā.

1. gadījumā trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 60°, taču to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 20°. 2. gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 90°, taču arī to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 30°. 3. gadījumā piecstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108°, to dala divi stari, tātad b piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108° : 3 = 36°.

9. Pirmkārt, redzam, ka 2., 3. un 4. skolēnam kopā ir 4 punkti un starp iekrāsotajām atbildēm a) arī ir 4 punkti, tātad 5., 6. un 7. jautājumā pareizās atbildes ir attiecīgi a, c un b. Tālāk skatāmies tabulu ar tikai pirmajiem 4 jautājumiem b). Šajā tabulā redzam, ka 4., 5. un 8. skolēniem kopā ir 6 punkti, turklāt 3. jautājumā ir kopā ir 1 punkts un 2. jautājumā – 0, 1 vai 2 punkti, savukārt 1. un 4. - 0 vai 3 punkti. Vienīgais variants, lai kopā sanāktu 6 punkti, ir, ja 2. jautājumā ir 2 punkti, tātad pareizā atbilde ir c. Iegūstam c) tabulu, kur redzams, ka no atlikušajiem jautājumiem jāiegūst 9 punkti. d) tabulā norādīts punktu skaits, kāds būtu katrā jautājumā, ja atbilstošā atbilde būtu pareiza. Šo punktu summai jābūt vienādai ar 9. Šiem kritērijiem atbilst varianti aba, abc, bba, bbc un ccb. Pēc izslēgšanas metodes (piemēram, aba un bba neder, jo tad 1. skolēnam būtu 2 punkti) atrodam vienīgo pareizo variantu – abc. Tātad pareizās atbildes pēc kārtas ir **a, c, b, c, a, c, b**.

a)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes							P
	1	2	3	4	5	6	7	
1	c	b	b	a	c	c	c	2
2	b	a	b	a	b	b	c	1
3	c	b	c	c	b	b	c	1
4	a	c	a	b	c	a	a	2
5	a	b	b	b	c	c	c	3
6	b	a	b	b	a	c	b	4
7	b	b	c	c	a	b	c	2
8	a	c	c	b	a	c	a	4

b)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes				P
	1	2	3	4	
1	c	b	b	a	1
2	b	a	b	a	1
3	c	b	c	c	1
4	a	c	a	b	2
5	a	b	b	b	2
6	b	a	b	b	1
7	b	b	c	c	1
8	a	c	c	b	2

c)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes			P
	1	3	4	
1	c	b	a	1
2	b	b	a	1
3	c	c	c	1
4	a	a	b	1
5	a	b	b	2
6	b	b	b	1
7	b	c	c	1
8	a	c	b	1

d)

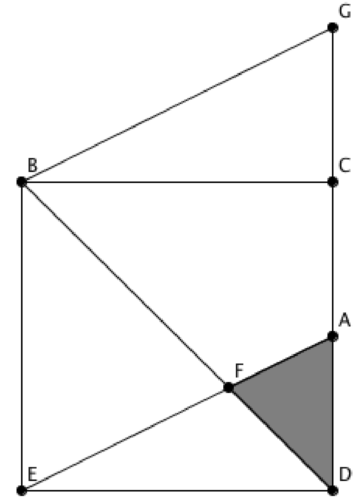
	1	3	4
a	3	1	2
b	3	4	4
c	2	3	2

10. Varam izteikt c kā $k \cdot m$. Tad doto virkni varam sadalīt šādās k daļās (katrā daļā ir m locekļi):

$$\underbrace{b, 2\mathrm{b}, \ldots, bm}_{\text{1. daļa}} \underbrace{b(m+1), b(m+2), \ldots, 2\mathrm{m}}_{\text{2. daļa}} \ldots \underbrace{b((k-1)m+1), b((k-1)m+2), \ldots, bkm}_{\text{k-tā daļa}} .$$

Uzrādīsim, ka šim dalījumam ir spēkā prasītie nosacījumi. Katra no daļām veido aritmētisko progresiju, tādēļ vispārīgi katras daļas locekļu summu mēs varam izteikt kā $b \cdot m \cdot i + \frac{b \cdot m(m+1)}{2}$ (kur i = 0, 1, 2, ...(k-1)). Attiecīgi jebkuru divu daļu locekļu starpību var izteikt kā $b \cdot m \cdot i$. Izsakot b kā $k \cdot z$, iegūstam $k \cdot z \cdot m \cdot i = z \cdot c \cdot i$. Tātad katras daļas locekļu summu starpība dalās ar c un, tā kā nekādu divu daļu locekļu summas nav vienādas, tad to starpības nebūs nulle.

11. Novelk $BG \| EA$.



$$\left.\begin{array}{r} BG \| FA \\ DG \text{ un } DA \text{ uz vienas taisnes} \\ DF \text{ un } DB \text{ uz vienas taisnes} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, DFA \sim \Delta\, DBG$$

$$\Delta\, BGC = \Delta\, EAD \Rightarrow GC = AD = DG = 3\mathrm{AD} \Rightarrow k = \frac{AD}{DG} = \frac{1}{3}$$

$$S(DBG) = S(DBC) + S(BCG) = S(DBC) + S(EAD)$$

$$S(DBG) = S\frac{(BCDE)}{2} + S\frac{(BCDE)}{2} = \frac{3S(BCDE)}{4}$$

$$S(DFA) = k^2 \cdot s(DBG) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3S(BCDE)}{4} = S\frac{(BCDE)}{12}$$

12. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdī atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar p, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti p-1 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā p-2 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa p atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar p. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar p un tam nav neviena kopīga dalītāja ar p, jo p ir pirmskaitlis, tad $(x-y)$ dalās ar p, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar p. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par p, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

13. Veicam algebriskus pārveidojumus

$$(a+b+c)(d+e+f) < 3(ad+be+cf)$$
$$ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf < 3\mathrm{ad}+3\mathrm{be}+3\mathrm{cf}$$
$$2\mathrm{ad}+2\mathrm{be}+2\mathrm{cf}-ae-af-bd-bf-cd-cf > 0$$
$$(ad-bd-ae+be)+(be-ce-bf+cf)+(ad-cd-af+cf) > 0$$
$$(a-b)(d-e)+(b-c)(e-f)+(a-c)(d-f) > 0$$

Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo

$(a-b)(d-e)>0$ (no dotā $a>b, d>e$ un $a-b>0, d-e>0$)

$(b-c)(e-f)>0$ (no dotā $b>c, e>f$ un $b-c>0, e-f>0$)

$(a-c)(d-f)>0$ (no dotā $a>c, d>f$ un $a-c>0, d-f>0$).

14. Pēc katras spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanas reizes spuldzītes un slēdžus var sadalīt divās daļās – spuldzītēs, kuras netika ieslēgtas, un slēdžos, kuriem netika nomainīts stāvoklis, t.i., tie, kuri varētu ieslēgt neieslēgtās spuldzītes, un spuldzītēs, kuras tika ieslēgtas un slēdžos, kuriem tika nomainīts stāvoklis. Savukārt, nākamajā spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanās reizē katru no divām esošajām grupām, balstoties uz tajās ieslēgtajiem slēdžiem un iedegtajām spuldzītēm, varēsim sadalīt vēl divās grupās (tā kā slēdžiem un spuldzītēm var būt tikai 2 stāvokļi ieslēgts/izslēgts, tad katru no jau esošajām grupām varēsim sadalīt ne vairāk kā 2 citās grupās). Pēc k gājieniem dotās spuldzītēs būs sadalītas 2^k grupās. Skaidrs, ka brīdī, katrā grupā būs pa vienai spuldzītei, mēs visām spuldzītēm zināsim, kurš slēdzis tās ieslēdz. Tādēļ, lai pēc k gājieniem mēs zinātu, kuru spuldzīti ieslēdz, kurš slēdzis, jābūt spēkā sekojošai nevienādībai $\frac{2^n}{2^k}\leq 1$, tātad $2^n\leq 2^k$ un $k\geq n$. Tātad minimālais nepieciešamais telpas apmeklējumu reižu skaits ir n (par to, ka ar n reizēm pietiek, varam pārliecināties pēc katras apmeklējuma reizes, dalot spuldzītes kā aprakstīts uzdevumā).

15. Ar S_i apzīmēsim naudas daudzumu, par kādu i-tajā gadā tiek veikta aizņēmuma pamatsummas atmaksa (i = 1, 2, 3 ... 10). Tad $S_i = 12950 - 0{,}05\cdot K_i$, kur K_i ir i-tajā gadā atlikusī aizņēmuma daļa, un $S_{i+1} = 12950 - 0{,}05\cdot(K_i - S_i)$. Varam pārliecināties, ka $S_{i+1} = 1{,}05\cdot S_i$. Tātad skaitļi S_i veido ģeometrisko progresiju: $S_1, S_2 = S_1\cdot 1{,}05, S_3 = S_1\cdot 1{,}05^2, \ldots, S_{10} = S_1\cdot 1{,}05^9$. Tā kā pēc 10 gadiem jāatmaksā viss aizņēmums, tad maksimālais naudas apjoms P, ko Orbitreks varēs aizņemties, būs vienāds ar skaitļu S_i (katra gada atmaksāto daudzumu) summu.

$$P = S_1 + S_1\cdot 1{,}05 + S_1\cdot 1{,}05^2 + \ldots + S_1\cdot 1{,}05^9 = S_1\cdot\frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} = (12950 - 0{,}05\cdot P)\cdot\frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} .$$

Pārveidojot iegūto vienādību, iegūstam

$$P + 0{,}05P\cdot\frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} = 12950\cdot\frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}$$

$$P\left(1+\frac{0{,}05\cdot(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}\right) = 12950\cdot\frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}$$

$$P\left(-0{,}05+0{,}05\cdot(1-1{,}05^{10})\right) = 12950\cdot(1-1{,}05^{10})$$

$$P\left(-0{,}05\cdot 1{,}05^{10}\right) = 12950\cdot(1-1{,}05^{10})$$

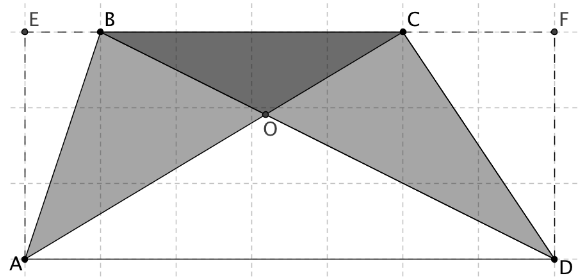
$$P = -\frac{12950\cdot(1-1{,}05^{10})}{0{,}05\cdot 1{,}05^{10}}$$

Varam aprēķināt, ka P ≈ 99990.

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

11. klases atrisinājumi

1. Apskatām variantu, kad AD, BC – pamati. Novelk perpendikulus AE un DF pret taisni BC.



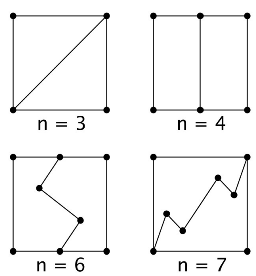
$AE = DF = h$ (taisnstūra pretējās malas)

$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = S(DBC)$

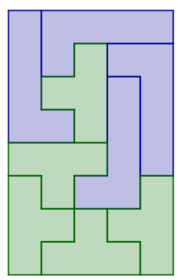
$S(ABC) - S(BOC) = S(DBC) - S(BOC)$

$S(ABO) = S(DCO)$

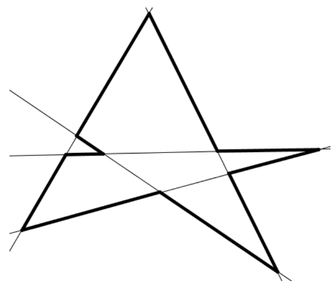
Gadījumā, ja trapeces pamati ir AB un CD, prasītie trijstūri nav vienādi.



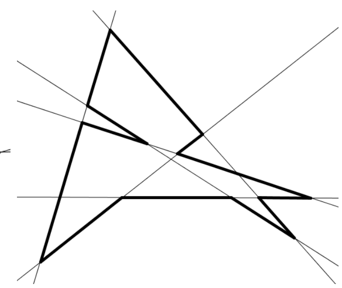
Zīmējums 1



Zīmējums 2



Zīmējums 3



Zīmējums 4

2. Skat. zīmējumu Nr. 1.

3. Skat. zīmējumu Nr. 2.

4. a) Skat. zīmējumu Nr. 3, b) skat. zīmējumu Nr. 4.

5. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdī t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

6. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2=q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q. Iegūstam:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p=1$ (līdz ar to $q=q$), vai $q=0$ ($p\cdot 0=0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

7. $2\text{abc}\overset{?}{>}a^3-ab^2-ac^2 \,|:a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)

$2\text{bc}\overset{?}{>}a^2-b^2-c^2$

$b^2+2\text{bc}+c^2\overset{?}{>}a^2$

$(b+c)^2\overset{?}{>}a^2$

$b+c\overset{?}{>}a$ (pēc trijstūra nevienādības)

8. Pēc grafika viegli noteikt $f(x)=0$ saknes. Tās ir $x_1=-4, x_2=-2, x_3=0{,}5\,, x_4=2$. To zinot, varam uzrakstīt funkciju formā

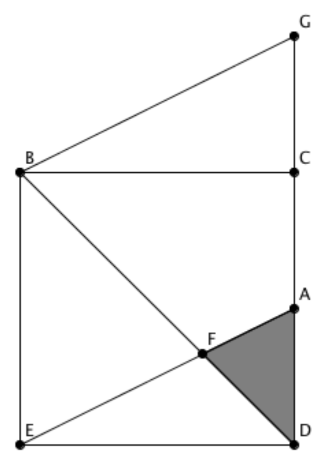
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=a(x+4)(x+2)(x-0{,}5)(x-2)$. Lai atrastu a vērtību, varam noteikt $f(0)$. No grafika varam nolasīt, ka $f(0)=16$. Aprēķinot

$f(0)=a\cdot 4\cdot 2\cdot(-0{,}5)\cdot(-2)=a\cdot 8$. Līdz ar to $a=2$ un

$f(x)=2(x+4)(x+2)(x-0{,}5)(x-2)=(x+4)(x+2)(2\text{x}-1)(x-2)$.

9. Novelk $BG\|EA$.

$$\left.\begin{array}{r} BG\|FA \\ DG\ un\ DA\ uz\ vienas\ taisnes \\ DF\ un\ DB\ uz\ vienas\ taisnes \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\, DFA\sim\Delta\, DBG$$



$$\Delta\, BGC=\Delta\, EAD\Rightarrow GC=AD=DG=3\text{AD}\Rightarrow k=\frac{AD}{DG}=\frac{1}{3}$$

$$S(DBG)=S(DBC)+S(BCG)=S(DBC)+S(EAD)$$

$$S(DBG)=S\frac{(BCDE)}{2}+S\frac{(BCDE)}{2}=\frac{3\,S(BCDE)}{4}$$

$$S(DFA)=k^2\cdot s(DBG)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3\,S(BCDE)}{4}=S\frac{(BCDE)}{12}$$

10. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \leq 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

11. Varam izteikt c kā $k \cdot m$. Tad doto virkni varam sadalīt šādās k daļās (katrā daļā ir m locekļi):

$$\underbrace{b, 2b, \ldots, bm}_{\text{1. daļa}} \underbrace{b(m+1), b(m+2), \ldots, 2m}_{\text{2. daļa}} \ldots \underbrace{b((k-1)m+1), b((k-1)m+2), \ldots, bkm}_{\text{k-tā daļa}} .$$

Uzrādīsim, ka šim dalījumam ir spēkā prasītie nosacījumi. Katra no daļām veido aritmētisko progresiju, tādēļ vispārīgi katras daļas locekļu summu mēs varam izteikt kā $b \cdot m \cdot i + \dfrac{b \cdot m(m+1)}{2}$ (kur i = 0, 1, 2, ...(k-1)). Attiecīgi jebkuru divu daļu locekļu starpību var izteikt kā $b \cdot m \cdot i$. Izsakot b kā $k \cdot z$, iegūstam $k \cdot z \cdot m \cdot i = z \cdot c \cdot i$. Tātad katras daļas locekļu summu starpība dalās ar c un, tā kā nekādu divu daļu locekļu summas nav vienādas, tad to starpības nebūs nulle.

12. Veicam algebriskus pārveidojumus

$$(a+b+c)(d+e+f)<3(ad+be+cf)$$
$$ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf<3ad+3be+3cf$$
$$2ad+2be+2cf-ae-af-bd-bf-cd-cf>0$$
$$(ad-bd-ae+be)+(be-ce-bf+cf)+(ad-cd-af+cf)>0$$
$$(a-b)(d-e)+(b-c)(e-f)+(a-c)(d-f)>0$$

Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo

$(a-b)(d-e)>0$ (no dotā $a>b, d>e$ un $a-b>0, d-e>0$)

$(b-c)(e-f)>0$ (no dotā $b>c, e>f$ un $b-c>0, e-f>0$)

$(a-c)(d-f)>0$ (no dotā $a>c, d>f$ un $a-c>0, d-f>0$).

13. Apskatām vienā rindiņā uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Apzīmēsim skaitli kreisajā stabiņā ar m.

a) Ja stabiņa labajā pusē ir pāra skaitlis (2n), tad nākamajā rindiņā skaitļu reizinājums nemainās – $m \cdot 2n \rightarrow 2m \cdot n$.

b) Ja stabiņa labajā pusē ir nepāra skaitlis (2n + 1), tad nākamajā rindiņā abu skaitļu reizinājums ir par m mazāks – $m \cdot (2n+1) \rightarrow 2m \cdot n$.

Kad pēc algoritma esam nonākuši pie rindiņas, kurā kreisajā pusē ir skaitlis m, bet labajā – 1, vēlreiz veicam dalīšanu un reizināšanu ar 2. Iegūsim vēl vienu rindiņu ar skaitļiem 2m un 0. Šo skaitļu reizinājums ir vienāds ar 0.

Salīdzinot ar pirmo rindiņu, pēdējās rindiņas (tās, kurā labajā pusē ir 0) reizinājums ir samazinājies tieši par abu sākotnējo skaitļu reizinājumu. Tā kā skaitļu reizinājums no vienas rindiņas uz nākamo samazinās tikai gadījumos, kad labajā pusē ir nepāra skaitlis, turklāt tas samazinās par kreisajā pusē uzrakstīto skaitli ($m\cdot(2n+1)-2n\cdot n=m$), tad saskaitot visus kreisās puses skaitļus rindiņās, kurās labajā pusē ir nepāra skaitlis, iegūsim pirmās un pēdējās rindiņas skaitļu reizinājumu starpību – abu sākotnējo skaitļu reizinājumu.

14. Pēc katras spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanas reizes spuldzītes un slēdžus var sadalīt divās daļās – spuldzītēs, kuras netika ieslēgtas, un slēdžos, kuriem netika nomainīts stāvoklis, t.i., tie, kuri varētu ieslēgt neieslēgtās spuldzītes, un spuldzītēs, kuras tika ieslēgtas un slēdžos, kuriem tika nomainīts stāvoklis. Savukārt, nākamajā spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanās reizē katru no divām esošajām grupām, balstoties uz tajās ieslēgtajiem slēdžiem un iedegtajām spuldzītēm, varēsim sadalīt vēl divās grupās (tā kā slēdžiem un spuldzītēm var būt tikai 2 stāvokļi ieslēgts/izslēgts, tad katru no jau esošajām grupām varēsim sadalīt ne vairāk kā 2 citās grupās). Pēc k gājieniem dotās spuldzītēs būs sadalītas 2^k grupās. Skaidrs, ka brīdī, katrā grupā būs pa vienai spuldzītei, mēs visām spuldzītēm zināsim, kurš slēdzis tās ieslēdz. Tādēļ, lai pēc k gājieniem mēs zinātu, kuru spuldzīti ieslēdz, kurš slēdzis, jābūt spēkā sekojošai nevienādībai $\frac{2^n}{2^k}\le 1$, tātad $2^n\le 2^k$ un $k\ge n$. Tātad minimālais nepieciešamais telpas apmeklējumu reižu skaits ir n (par to, ka ar n reizēm pietiek, varam pārliecināties pēc katras apmeklējuma reizes, dalot spuldzītes kā aprakstīts uzdevumā).

15. Ar S_i apzīmēsim naudas daudzumu, par kādu i-tajā gadā tiek veikta aizņēmuma pamatsummas atmaksa (i = 1, 2, 3 ... 10). Tad $S_i=12950-0{,}05\cdot K_i$, kur K_i ir i-tajā gadā atlikusī aizņēmuma daļa, un $S_{i+1}=12950-0{,}05\cdot\left(K_i-S_i\right)$. Varam pārliecināties, ka $S_{i+1}=1{,}05\cdot S_i$. Tātad skaitļi S_i veido ģeometrisko progresiju: $S_1, S_2=S_1\cdot 1{,}05, S_3=S_1\cdot 1{,}05^2,\ldots,S_{10}=S_1\cdot 1{,}05^9$. Tā kā pēc 10 gadiem jāatmaksā viss aizņēmums, tad maksimālais naudas apjoms P, ko Orbitreks varēs aizņemties, būs vienāds ar skaitļu S_i (katra gada atmaksāto daudzumu) summu.

$$P=S_1+S_1\cdot 1{,}05+S_1\cdot 1{,}05^2+\ldots+S_1\cdot 1{,}05^9=S_1\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}=\left(12950-0{,}05\cdot P\right)\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}\ .$$

Pārveidojot iegūto vienādību, iegūstam

$$P+0{,}05P\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}=12950\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}$$

$$P\left(1+\frac{0{,}05\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}\right)=12950\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}$$

$$P\left(-0{,}05+0{,}05\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)\right)=12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)$$

$$P\left(-0{,}05\cdot 1{,}05^{10}\right)=12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)$$

$$P=-\frac{12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)}{0{,}05\cdot 1{,}05^{10}}$$

Varam aprēķināt, ka P ≈ 99990.