**Uzdevumu lapa 8.klasēm**

RV1.Ģ komandu olimpiāde matemātikā pamatskolai

# Svaigā Maize 2004

1. Dots: $a + b = 1$ . Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + 3ab = 1$ .

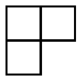
2. Dots ΔABC. Punkti M, N un K pieder attiecīgi malām BC, CA un AB. Nogriežņi AM, BN un CK krustojas vienā punktā O. Pierādīt:

$AM + BN + CK > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

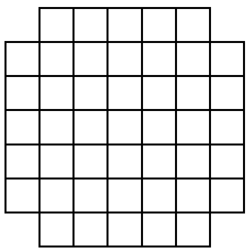
3. No dārza līdz mājām ir 10 km. Kad Ome ar ābolu grozu no dārza sāka iet mājās, Mazdēls ar riteni brauca viņai pretim. Kad viņi satikās, Mazdēls paņēma daļu no āboliem un veda uz mājām. Nonācis mājās, viņš ābolus tur atstāja un atkal brauca pretim Omei. Tā viņš atkārtoja, līdz Ome bija pārnākusi mājās. Cik km Mazdēls veica, ja viņš brauca ar ātrumu 20 km/h, bet Ome gāja ar ātrumu 4 km/h ?

4. Dotas 7 bumbiņas - 2 no tām ir citādā svarā nekā pārējās 5. Doti sviru svari bez atsvariem. Vai ar 5 svēršanām var atrast 2 citādās bumbiņas?

5. Karaļvalstī ir 8 pilsētas. Karaliene grib uzbūvēt tādu ceļu sistēmu, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, iebraucot ne vairāk kā vienā citā pilsētā, un no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļu. Pie kāda mazākā k tas iespējams?

6. Dots kvadrāts, kas sastāv no n x n kvadrātiskām rūtiņām un kuram stūru rūtiņas izgrieztas (attēlā piemērs, ja n=7). Vai to var sadalīt šādās figūrās:  , ja

a) $n = 7$;
b) $n = 8$;
c) $n = 9$ ?



7. Mežā dzīvo 21 alnis. Daži aļņi draudzējas savā starpā (ja viens alnis draudzējas ar otru, tad otrais draudzējas ar pirmo). Vai ir iespējams, ka katram alnim ir tieši 7 draugi?

8. Vai pa rūtiņu tīklu var uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kuras posmu garumi ir pēc kārtas 1,2,...,n rūtiņas, ja

a) n = 8

b) n = 9

c) n =10

9. Vai kvadrātā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 36 katru vienu reizi tā, lai katrā kolonnā un rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar

a) 9 ;

b) 27 ?

10. Dota lapa ar regulāru trijstūri, lineāls bez atzīmēm, cirkulis un zīmulis. Konstruēt regulāru sešstūri (aprakstīt risinājuma gaitu).

Piezīme: daudzstūri sauc par regulāru, ja visas tā malas ir vienādas un visi leņķi vienlieli.

11. Noteikt visus reālu skaitļu pārus (a;b), kuriem izpildās vienādība

$$a^2 + b^2 = \frac{5ab}{2}$$

12. a, b, c, d - četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ dalās ar 4.

13. Ar k apzīmēsim naturālu skaitli. Virknes pirmais loceklis ir $a_1=k-1$.

$a_n=a_{n-1}+k^{an-1}$. Pierādīt, ka neviens virknes loceklis nedalās ar k.

14. Skaitļu pāri sauc par *spēcīgu*, ja šo skaitļu kvadrātu starpība ir vienāda ar kāda skaitļa kubu, bet šo skaitļu kubu starpība - ar kāda skaitļa kvadrātu.

a) atrast kaut vienu *spēcīgu* skaitļu pāri;

b) pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *spēcīgi* skaitļu pāri.

15. Apskatām visus veselos un pozitīvos skaitļus, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3; 4 un 5. Sakārtosim tos augošā secībā un ar n apzīmējam skaitli, kas šajā sarakstā atrodas 2004-ajā vietā.

a) cik ciparu ir skaitlim n ?

b) atrast skaitli n.