Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atvieglojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1, 3, 5, 7 ,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2, 4, 6, 8, 10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka var atrast tādus divus dalībniekus, kuru vērtējumu summa dalās ar 3.

2. Orbitreku ciemā ir 20 ciltis, kuras pielūdz dievības. Katru dievību pielūdz tieši 3 ciltis. Orbitreki uzskata, ka brīdī, kad kāda cilts pielūdz tieši 7 dievības, tā atrodas *balansā.* Viedākie Orbitreki ir pierādījuši, ka brīdī, kad visas ciltis būs *balansā,* pienāks Pasaules gals. Vai Pasaules gals var pienākt?

3. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas un sviru svari bez atsvariem. Divas no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Abas vieglākās monētas sver vienādi, pārējās 7 smagākās- arī vienādi. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?

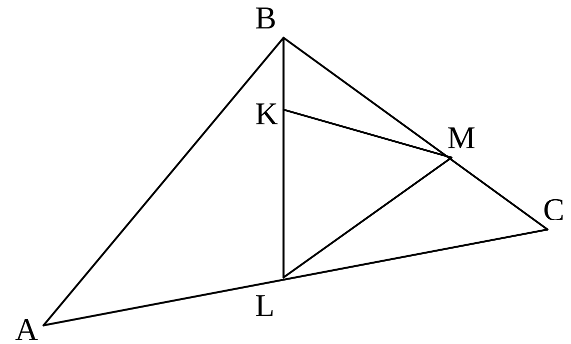
4. Uz trijstūra ABC malām AB, BC un AC atzīmēti attiecīgi punkti C_1, A_1 un B_1 tā, ka $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Pierādīt, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ augstumu krustpunkts atrodas uz leņķa A bisektrises.

5. Dots, ka x un y ir nenegatīvi skaitļi, kuru summa nepārsniedz 1. Pierādīt, ka $x^2+8x^2y^2+y^2\le 1$.

6. No pirmajiem 80 naturālajiem skaitļiem izvēlējās 20 pāra skaitļus un 20 nepāra skaitļus. Izvēlēto pāra skaitļu summa ir vienāda ar izvēlēto nepāra skaitļu summu. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem ir divi tādi, kuru summa ir 81.

7. Skolotājam Gabrielam bija aizdomas, ka viņa stundā daži skolēni guļ. Slepus pirms stundas viņš klases visos 6 stūros (klasei ir tāda regulāra sešstūra forma, kura malas garums ir a) uzstādīja krācējmetrus. Katrs krācējmetrs fiksē to telpas iekšpusē guļošo skaitu, kuri no tā atrodas attālumā, kas nepārsniedz a. Pēc stundas izrādījās, ka visi krācējmetri kopā fiksējuši 7 guļošos.
Cik skolēnu gulēja stundā? (*Par regulāru sešstūri sauc sešstūri, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.)*

8. Trijstūra ABC leņķi sakrīt ar ΔLMC leņķiem, savukārt ΔLMC leņķi sakrīt ar ΔLMK leņķiem un ΔLMK leņķi sakrīt ar ΔKMB leņķiem. Noteikt leņķa B lielumu.



9. Katrā kvadrāta *ABCD* virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās malas galos, maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi- dzeltena, trešo reizi- sarkana, ceturto reizi- dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes *A* un *C* ir sarkanas, bet *B* un *D* vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdžus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

10. Dotas trīs vienādības

$$a^2+b^2=\frac{25ab}{12}$$

$$a^2+c^2=\frac{13ac}{6}$$

$$b^2+c^2=\frac{5bc}{2}$$

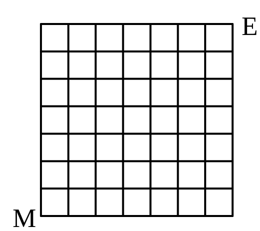
Atrast tādu skaitļu *a, b, c* trijnieku, ka visas trīs vienādības izpildās.
Pierādīt, ka tādu trijnieku ir bezgalīgi daudz.

11. Divi riteņbraucēji sāk braukt no viena punkta. Pirmais no tiem dodas dienvidu virzienā ciemoties pie vecmāmiņas. Kad riteņbraucējs nobraucis 1 km, tas apstājas, lai atpūstos, tad nobrauc vēl 3 km un atkal apstājas. Tā viņš turpina, katru reizi līdz nākamajai apstāšanās reizei nobraucot par 2 km vairāk nekā līdz iepriekšējai apstāšanās reizei. Nonācis galā pie vecmāmiņas viņš konstatē, ka bija apstājies n reizes. Otrais riteņbraucējs pie savas vecmāmiņas brauc tieši tādā pašā manierē kā pirmais braucējs, ceļā līdz vecmāmiņai veicot n apstāšanās. Tikai, atšķirībā no pirmā, braukšanu viņš uzsāk pretējā virzienā (ziemeļu virzienā) un līdz pirmajai apstāšanās reizei nobrauc 2 km, nevis 1 km, bet līdz otrajai apstāšanās reizei nobrauc 4 km, nevis 3 km. Pierādīt, ka attālums (kilometros) starp abu riteņbraucēju vecmāmiņām dalās ar 2n+3.

12. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1; 0; 1. Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2x2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0, bet katrā 3x3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1?

13. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši n reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komandai tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7. Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

14. Dots 7 x 7 rūtiņu tīkls ar rūtiņu malu garumu 1 metrs. Spēlētāji Mārtiņš un Edgars pamīšus pārvieto katrs savu spēles kauliņu pa rūtiņu virsotnēm. Turklāt kauliņu katrā gājienā drīkst pārvietot tieši par 1 metru un tikai uz virsotnēm, kurās iepriekš nav bijis neviens cits kauliņš. Mārtiņš spēli uzsāk no virsotnes M, bet Edgars no virsotnes E. Spēlētājs, kurš vairs nespēj izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot, ja pirmais gājienu izdara Mārtiņš?



15. Dots, ka a ir reāls skaitlis. Pierādīt
$1+a^2+a^4+...+a^{2\cdot 2007}\geq 2(a+a^5+a^9+...+a^{2\cdot 2007-1})$.