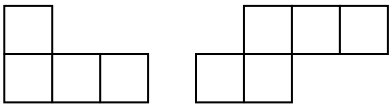
Komandu olimpiāde „Asie Cipari” 

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

3. Kubu sagrieza 1000 vienādos mazākos kubiņos. Cik reižu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir lielāks par lielā kuba virsmas laukumu?

4. Futbola čempionātā piedalās 8 komandas. Pirmajās 10 spēļu kārtās 17 spēles beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Anatolijs ir pierādījis, ja 11. izspēles kārtā savā starpā spēlēs 2 komandas, kurām kopējais nospēlēto neizšķirtu skaits ir lielāks par 8, tad to spēle arī beigsies ar neizšķirtu. Pierādiet, ka 11. spēļu kārtā vismaz viena spēle beigsies ar neizšķirtu!

5. Doti 5 naturāli skaitļi. Nekādu divu starpība nedalās ar 5. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 5.

6. Dots 8x8x8 kubs, kas sastāv no 512 mazākiem 1x1x1 kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā 2x2x2 kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?

7. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādīt

a) $2^8+3\cdot 2^7+3^2\cdot 2^6+3^3\cdot 2^5+3^4\cdot 2^4+3^5\cdot 2^3+3^6\cdot 2^2+3^7\cdot 2^1+3^8=3^9-2^9$

b) $2^k+3\cdot 2^{k-1}+3^2\cdot 2^{k-2}+\ldots+3^{k-1}\cdot 2+3^k=3^{k+1}-2^{k+1}$

8. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērto Zaļo podu?

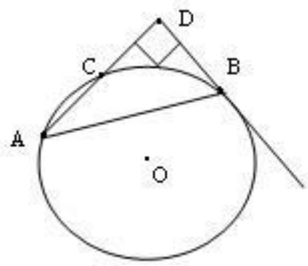
9. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

10. Pierādīt, ka $\frac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2)$, ja $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

11. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise!



12. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

13. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

14. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?

15. Pilī dzīvo k orbitreki (k>3). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam k+6 zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķīra vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādīt, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.