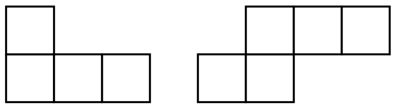
Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

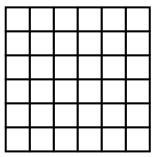
Uzdevumi 7. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Par maģisku kvadrātu sauc tādu 4x4 rūtiņu kvadrātu, kurā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 16 (katrs skaitlis tieši vienu reizi) tā, ka katrā rindiņā, kolonnā un abās garākajās diagonālēs skaitļu summas ir vienādas. Atrodiet kaut vienu maģisko kvadrātu!

3. Dots 6x6 rūtiņu kvadrāts. Cik ir tādu kvadrātu, kuru visas malas vilktas pa dotā kvadrāta rūtiņu līnijām?



4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1000. Mārtiņam patīk tikai tādi skaitļi, kas dalās gan ar 10, gan 12, gan 20. Cik skaitļu paliktu uz tāfeles, ja Mārtiņš nodzēstu visus skaitļus, kas viņam nepatīk?

5. Cik ir tādu trīsciparu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar
   a) 3?
   b) 25?

6. Pierādīt $2^7+3\cdot 2^6+3^2\cdot 2^5+3^3\cdot 2^4+3^4\cdot 2^3+3^5\cdot 2^2+3^6\cdot 2^1+3^7=3^8-2^8$.

7. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

8. Noliktavā ir 3 ābolu šķirnes – *zaļie* āboli, *garšīgie* un *poļu*. Ir zināms, ka 50% no visiem āboliem ir *zaļie,* 30% *garšīgie* un 20% *poļu*. Mēneša beigās pēc ražas novākšanas *zaļo* ābolu skaits palielinājās par 20%, bet *poļu* par 25%, bet *garšīgo* skaits par $66\frac{2}{3}$%, kā arī pēc ābolu palielinājuma atklājās, ka 40% no visiem *zaļās* šķirnes āboliem un 22% no *garšīgo* šķirnes ir sapuvuši., bet no *poļu* šķirnes nebija sapuvis neviens. Ja pieņem, ka visus sapuvušos ābolus izmeta ārā, tad, cik mēneša beigās procentuāli bija *zaļo* ābolu un cik- *garšīgo*?

9. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

10. Uz tāfeles uzrakstīti 10 naturāli skaitļi. Katru divu uzrakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 2, bet mazākais kopīgais dalāmais 90. Aprēķināt doto skaitļu reizinājumu!

11. Doti 5 naturāli skaitļi. Nekādu divu starpība nedalās ar 5. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 5.

12. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot liftu 7 reizes? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.
b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

13. Futbola čempionātā piedalās 8 komandas. Pirmajās 10 spēļu kārtās 17 spēles beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Anatolijs ir pierādījis, ja 11. izspēles kārtā savā starpā spēlēs 2 komandas, kurām kopējais nospēlēto neizšķirtu skaits ir lielāks par 8, tad to spēle arī beigsies ar neizšķirtu. Pierādiet, ka 11. spēļu kārtā vismaz viena spēle beigsies ar neizšķirtu!

14. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

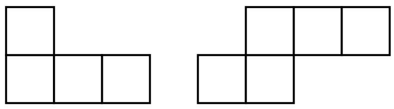
15. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

Komandu olimpiāde „Asie Cipari” 

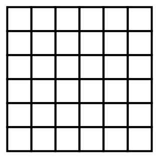
Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Dots 6x6 rūtiņu kvadrāts. Cik ir tādu kvadrātu, kuru visas malas vilktas pa dotā kvadrāta rūtiņu līnijām?



3. Pierādīt $2^8+3\cdot 2^7+3^2\cdot 2^6+3^3\cdot 2^5+3^4\cdot 2^4+3^5\cdot 2^3+3^6\cdot 2^2+3^7\cdot 2^1+3^8=3^9-2^9$.

4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1000. Mārtiņam patīk tikai tādi skaitļi, kas dalās gan ar 10, gan 12, gan 20. Cik skaitļu paliktu uz tāfeles, ja Mārtiņš nodzēstu visus skaitļus, kas viņam nepatīk?

5. Noliktavā ir 3 ābolu šķirnes – *zaļie* āboli, *garšīgie* un *poļu*. Ir zināms, ka 50% no visiem āboliem ir *zaļie,* 30% *garšīgie* un 20% *poļu*. Mēneša beigās pēc ražas novākšanas *zaļo* ābolu skaits palielinājās par 20%, bet *poļu* par 25%, bet *garšīgo* skaits par $66\frac{2}{3}$%, kā arī pēc ābolu palielinājuma atklājās, ka 40% no visiem *zaļās* šķirnes āboliem un 22% no *garšīgo* šķirnes ir sapuvuši., bet no *poļu* šķirnes nebija sapuvis neviens. Ja pieņem, ka visus sapuvušos ābolus izmeta ārā, tad, cik mēneša beigās procentuāli bija *zaļo* ābolu un cik *garšīgo*?

6. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

7. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

8. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot liftu 7 reizes? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.
b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

9. Kubu sagrieza 1000 vienādos mazākos kubiņos. Cik reižu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir lielāks par lielā kuba virsmas laukumu?

10. Doti 10 divciparu skaitļi. Jebkuru divu skaitļu starpība dalās ar 9. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 10.

11. Vēstures skolotājai jāsadala vēstures eksāmena dalībnieki vismaz 3 vienlīdz lielās grupās. Sadalot dalībniekus 3 vienādās grupās, 2 dalībnieki palika nekur neiekļauti, 4 grupās 2 dalībnieki palika pāri, 5 grupās 4 dalībnieki. Cik grupās galu galā skolotājai būtu jāsadala eksaminējamie skolēni, lai visi skolēni tiktu iekļauti un visas grupas būtu vienādās, ja zināms, ka eksāmenā nepiedalās vairāk par 73 skolēniem?

12. Uz tāfeles uzrakstīti 10 naturāli skaitļi. Katru divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 2, bet mazākais kopīgais dalāmais 90. Aprēķināt doto skaitļu reizinājumu!

13. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

14. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kuriem dalītāju skaits ir nepāra pirmskaitlis.

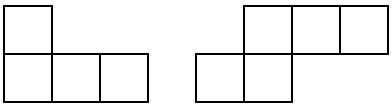
15. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

3. Kubu sagrieza 1000 vienādos mazākos kubiņos. Cik reižu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir lielāks par lielā kuba virsmas laukumu?

4. Futbola čempionātā piedalās 8 komandas. Pirmajās 10 spēļu kārtās 17 spēles beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Anatolijs ir pierādījis, ja 11. izspēles kārtā savā starpā spēlēs 2 komandas, kurām kopējais nospēlēto neizšķirtu skaits ir lielāks par 8, tad to spēle arī beigsies ar neizšķirtu. Pierādiet, ka 11. spēļu kārtā vismaz viena spēle beigsies ar neizšķirtu!

5. Doti 5 naturāli skaitļi. Nekādu divu starpība nedalās ar 5. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 5.

6. Dots 8x8x8 kubs, kas sastāv no 512 mazākiem 1x1x1 kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā 2x2x2 kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?

7. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādīt

a) $2^8 + 3\cdot 2^7 + 3^2\cdot 2^6 + 3^3\cdot 2^5 + 3^4\cdot 2^4 + 3^5\cdot 2^3 + 3^6\cdot 2^2 + 3^7\cdot 2^1 + 3^8 = 3^9 - 2^9$

b) $2^k + 3\cdot 2^{k-1} + 3^2\cdot 2^{k-2} + \ldots + 3^{k-1}\cdot 2 + 3^k = 3^{k+1} - 2^{k+1}$

8. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērto Zaļo podu?

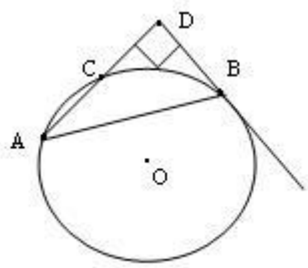
9. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

10. Pierādīt, ka $\frac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2)$, ja $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

11. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise!



12. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

13. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

14. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?

15. Pilī dzīvo k orbitreki (k>3). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam k+6 zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķīra vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādīt, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 10. klasei

1. Par maģisku kvadrātu sauc tādu 4x4 rūtiņu kvadrātu, kurā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 16 (katrs skaitlis tieši vienu reizi) tā, ka katrā rindiņā, kolonnā un abās garākajās diagonālēs skaitļu summas ir vienādas. Atrodiet kaut vienu maģisko kvadrātu!

2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

3. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērto Zaļo podu?

4. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltās bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

5. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

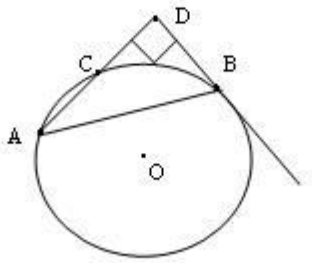
6. Pierādīt, ka $\dfrac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2)$,

ja $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

7. Vēstures skolotājai jāsadala vēstures eksāmena dalībnieki vismaz 3 vienlīdz lielās grupās. Sadalot dalībniekus 3 vienādās grupās, 2 dalībnieki palika nekur neiekļauti, 4 grupās 2 dalībnieki palika pāri, 5 grupās 4 dalībnieki. Cik grupās galu galā skolotājai būtu jāsadala eksaminējamie skolēni, lai visi skolēni tiktu iekļauti un visas grupas būtu vienādās, ja zināms, ka eksāmenā nepiedalās vairāk par 73 skolēniem?

8. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

9. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise.



10. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādīt:

a) $2^8+3\cdot 2^7+3^2\cdot 2^6+3^3\cdot 2^5+3^4\cdot 2^4+3^5\cdot 2^3+3^6\cdot 2^2+3^7\cdot 2^1+3^8=3^9-2^9$

b) $6^k+3\cdot 6^{k-1}+3^3\cdot 6^{k-2}+...+3^{2k-5}\cdot 6^2+3^{2k-3}\cdot 6+3^{2k-1}=3^{2k}$

11. Uz tāfeles uzrakstīti n naturāli skaitļi. Katru divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir *l*, bet mazākais kopīgais dalāmais *m*. Pierādīt, ka visu doto skaitļu reizinājums ir vienāds ar $m\cdot l^{n-1}$.

12. Dots 8x8x8 kubs, kas sastāv no 512 mazākiem 1x1x1 kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā 2x2x2 kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?

13. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?

14. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

15. Pilī dzīvo k orbitreki (k>3). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam k+6 zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķīra vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādīt, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.