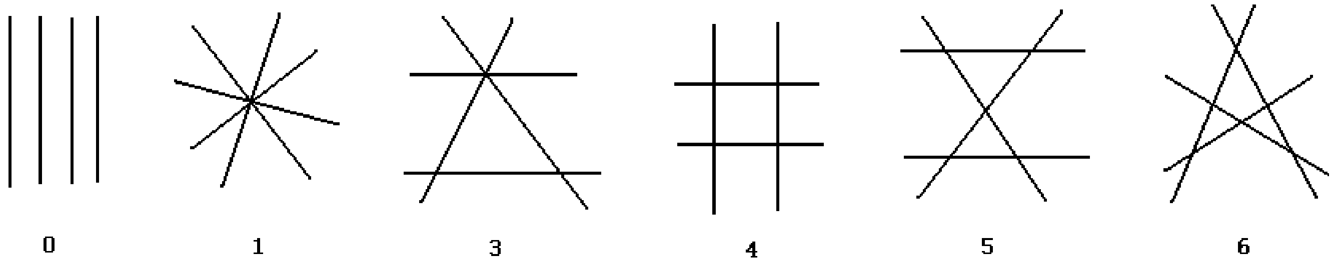
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

7. klases uzdevumu atrisinājumi

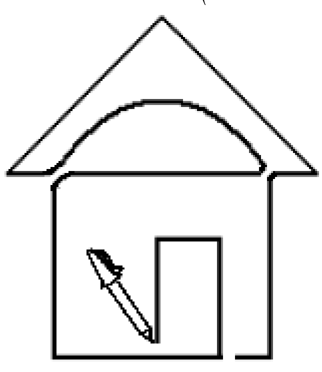
1. Pilnā riņķi ir 60 minūtes un 360°, tātad viena minūte atbilst 6 grādiem. 20 minūtes attiecīgi būs 120° (ja plkst. 12.00 ir 0°), bet stundu rādītājs stāvēs uz $50+\frac{20}{60}*5=51\frac{2}{3}$ minūtēm, tātad būs 310°. Leņķis starp rādītājiem būs 310°-120°=190° grādi (jeb 170°).

2. Iespējamās *n* vērtības un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties 4·3/2=6 veidos.To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



3. Viegli pārliecināties, ka $44^2 < 2009 < 45^2$, tātad starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tikai skaitļu no 1 līdz 44 kvadrāti. No šiem 44 skaitļu kvadrātiem, tikai pāra skaitļu kvadrāti būs meklētie skaitļi, jo nepāra skaitli, kāpinot kvadrātā mēs iegūstam nepāra skaitli. Tātad kopā ir $\frac{44}{2}$ = 22 skaitļi, kuri būtu kāda skaitļa kvadrāti.

4. Jā, mājiņu ir iespējams uzzīmēt ar vienu pildspalvas vilkumu – skat. zīm. Mājiņu *ar skursteni* nav iespējams uzzīmēt. Pievēršam uzmanību krustpunktiem durvju un skursteņa pamatnē – no tiem iziet 3 līnijas (nepāra skaits). Tātad nav iespējams iziet no neviena no šiem punktiem divas reizes, taču tajos ir jānonāk vismaz divreiz. Šādi punkti var būt tikai divi – sākums un beigas. Tātad, lai būtu iespējams uzzīmēt zīmējumu ar vienu vilkumu, tieši divām (vai nevienai) virsotnei jābūt ar nepāra skaitu izejošu līniju. (Interesentiem: meklēt *Eilera kontūrs / cikls (Eulerian path / cycle)*)



5. Pieņemsim, ka Mārtiņš vienu cimdu pāri uzada x stundās, tad Mārtiņš un Marta uzadīja 5x+20 pārus, bet Pjērs un Mārtiņš 8x+14 pārus. Tā kā abi adītāju pāri uzadīja vienādu skaitu cimdu pāru, t.i., vienu cimdu bloku, tad $5x+20=8x+14$, no kurienes 3x = 6 un x = 2. Vienā cimdu blokā ir 5x+20 cimdu pāru jeb 10 + 20 = 30 cimdu pāru.

6. Tā kā pie šāda māja novietojuma no numerācijas viedokļa ielas sākums sakrīt ar ielas beigām, tad no 78. mājas līdz ielas beigām ir tieši tikpat māju, cik no 37. mājas līdz ielas sākumam, t.i., 36 mājas. Tātad pēdējās mājas numurs ir $78+36=114$, kas attiecīgi nozīmē, ka uz šīs ielas pavisam ir 114 mājas.

7. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OOO=OOO OOO<OOO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.
Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.
3. svēršana (1.gad) O=O O<O
Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas
2. svēršana (2.gad) O=O O<O
Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

8. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu summa, būs nepāra skaitlis).

9. Jā, var. Skat. zīm.

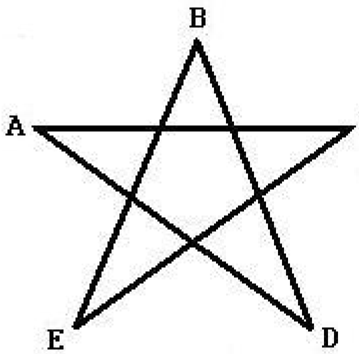
2	9	22	15	4	29
21	14	3	10	23	16
8	1	24	17	28	5
13	20	7	26	11	18
	25	12	19	6	27

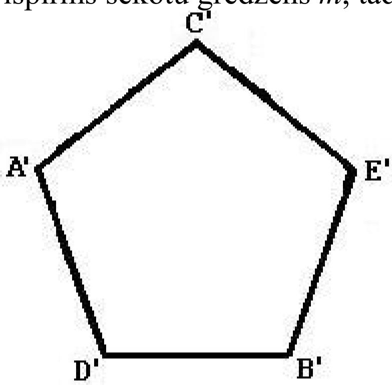
Ar pelēko laucīņu apzīmēta zirdziņa sākotnējā atrašanās vieta. Ar skaitļiem apzīmētā gājienu secībā, kāda zirdziņš var nostāties uz dotā laukuma visām rūtiņām.

10. Šī uzdevuma galvenā ideja ir, ka jebkuram naturāla skaitļa kvadrātam dalītāju skaits ir nepāra. Tiešām, pieņemsim $n = x^2$. Ja d ir n dalītājs, tad arī $\frac{n}{d}$ ir n dalītājs. Tas nozīmē, ka mēs varam sadalīt visus dažādos n dalītājus pāros, izņemot d = x, jo tad $d = x = \frac{d}{n}$. Tātad n dalītāju skaits ir nepāra skaitlis. $2009^{2008} = (2009^{1004})^2$ tāpēc tā dalītāju skaits ir nepāra.

11. Divu dažādu naturālu skaitļu (ne lielāku par 100) summa var būt robežās no 3 līdz 199 (ieskaitot), tātad 197 dažādas iespējas. Divus dažādus skaitļus no divdesmit viena var izvēlēties 21·20/2=210 veidos. Tātad, ja apskatīsim visas šādas summas, pēc Dirihlē principa (jeb „trušu un būrīšu" principa) iegūstam, ka starp tām eksistē divas summas, a + b un c + d, kas ir vienādas. Turklāt, nevar gadīties, ka kāds skaitlis izmantots abās summās (piem., ka a = c – jo tad arī b = d, tātad patiesībā tas ir viens un tas pats skaitļu pāris). Tādējādi esam ieguvuši nepieciešamos četrus dažādos skaitļus no dotajiem.

12. „Atlokot" piecstaru zvaigzni ABCDE, iegūstam regulāru piecstūri A'B'C'D'E'. Gredzenu pārvietošanu starp zvaigznes virsotnēm var identificēt ar pārvietošanu pa piecstūra malām (piem. A→C atbilst A'→C'). Lietosim saīsinājumus *b* (balts), *m* (melns) un *s* (strīpains). Sākotnēji gredzeni *s, b, m* atrodas virsotnēs A,B,C. Tātad, ejot pret pulksteņrādītāja virzienu ap piecstūri, sākot ar gredzenu *s*, vispirms sekos gredzens *b*, tad *m*. Tā kā ar atļautajiem gājieniem nav iespējams šo secību izjaukt, nav iespējams panākt, ka virsotnēs A,B,C ir gredzeni secībā *s, m, b* (jo tad piecstūrī, ejot pret pulksteņa rādītāja virzienu no gredzena *s*, vispirms sekotu gredzens *m*, tad *b*).





13. p – pasažieru skaits pārpildītos autobusos
a – pārpildīto autobusu skaits
n – kopējais autobusu skaits
t – pasažieru skaits nepārpildītos autobusos

Pēc dotā $\frac{t}{p} < \frac{60(n-a)}{60a} = \frac{n}{a} - 1$, jo $t \leq (n-a)60$ (katrā nepārpildītā autobusā ir ne vairāk par 60 pasažieriem) un p > 60a $\Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{60a}$ (katrā pārpildīta autobusā ir vairāk par 60 pasažieriem). Tāpēc $B = \frac{p}{p+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{p}} > \frac{1}{1+\frac{n}{a}-1} = \frac{a}{n} = A$.

Tiem, kuri zina, kas ir vidējais aritmētiskais lielums, piedāvājam arī alternatīvu risinājumu.
Ņemot vērā, ka ir vismaz viens nepārpildīts autobuss, vidējais pasažieru skaits pārpildītos autobusos būs lielākās nekā vidējais pasažieru skaits visos autobusos kopā, respektīvi, $\frac{p}{a} > \frac{p+t}{n}$. No šejienes iegūstam $B = \frac{p}{p+t} > \frac{a}{n} = A$.

14. a) Iedomāsimies, ka dotais pavadoņu stāvoklis bija 0. mēnesī. Pirmais pavadonis ik pēc 4 mēnešiem atgriezīsies sākotnējā stāvokli (4. mēnesī, 8. mēnesī, 12. mēnesī ...), otrais pavadonis ik pēc 6 mēnešiem (6. mēnesī, 12.mēnesī), trešais ik pēc 10 mēnešiem utt. Skaidrs, ka stāvoklis būs tāds pats, kad mēneša kārtas numurs dalīsies ar katra pavadoņa apriņķošanas perioda ilgumu. Tātad šis stāvoklis atkārtosies MKD(4,6,10,20,22)=660. mēnesī ,t.i., pēc 660 mēnešiem.
b) Lai pavadonis atrastos uz sākotnējās taisnes, tas var būt vai nu sākotnējā pozīcijā, vai diametrāli pretējā orbītas punktā. Kādā no šīm divām pozīcijām pavadonis nokļūs periodiski laika posmā, kas ir divreiz īsāks nekā Zemes apriņķošanai nepieciešamais laiks. Tātad šajā gadījumā, līdzīgi spriežot kā a) gadījumā, uz šis pašas taisnes pavadoņi būs pēc MKD(2,3,5,10,11) = 330 mēnešiem.

15. Jā, ir iespējams. Piemēram, ar šādu stratēģiju: pirmais rūķītis izskaita sarkano cepuru skaitu uz pārējo 6 rūķīšu galvām. Ja tas ir pāra skaitlis, viņš izsaka minējumu „sarkana" (ja nepāra – min „zila"), tādējādi nododot pārējiem rūķīšiem informāciju par sarkano cepuru skaita paritāti. Tā kā katrs no šiem 6 rūķīšiem redz pārējo piecu cepures, viņš var viegli secināt un pareizi uzminēt savas cepures krāsu (piemēram, ja pirmais min „zila", tad otrais zina, ka uz viņa un pārējo 5 rūķīšu galvām kopā ir nepāra skaits sarkanu cepuru. Ja starp pārējiem pieciem ir pāra skaits, tad otrajam ir sarkana cepure, citādi – zila. utt.) Piebildīsim, ka arī pirmajam rūķītim ir 50/50 izredzes iekļūt ballē (ja Sarkangalvīte nav noklausījusies stratēģiju).