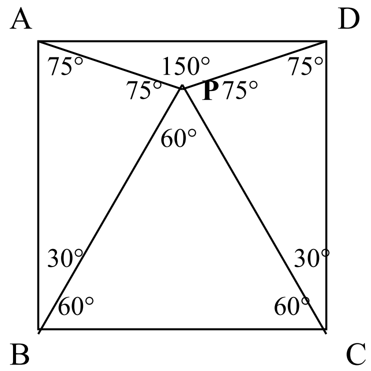
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

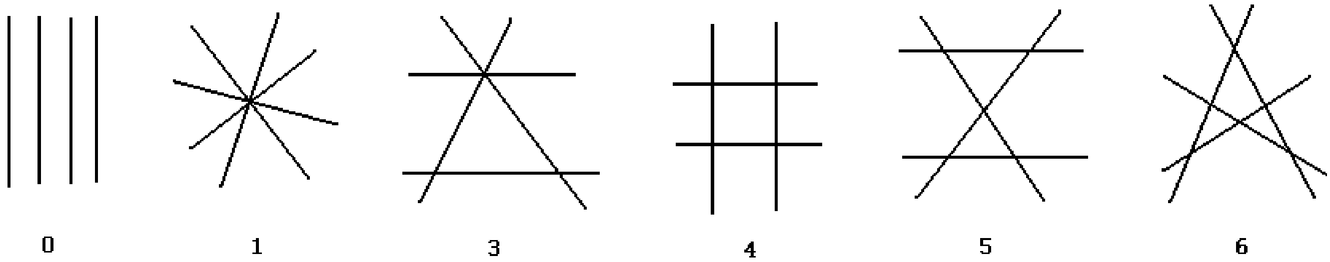
8. klases uzdevumu atrisinājumi

1. ΔBPC ir vienādmalu trijstūris, tādēļ visi tā leņķi ir 60°. $\angle ABC = 90°$ (ABCD-kvadrāts), tādēļ $\angle ABP = 90° - \angle PBC = 30°$. Pēc dotā BP = BC un, tā kā AB = BC (ABCD-kvadrāts), tad AB = BP, no kurienes $\angle BPA = \angle BAP = \frac{(180° - 30°)}{2} =$ 75°. Analogi spriežot par trijstūri CPD, mēs iegūstam, ka arī $\angle CPD = 75°$. Tātad $\angle APD = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°$.



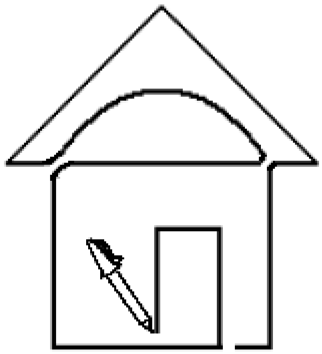
2. Viegli pārliecināties, ka $44^2 < 2009 < 45^2$, tātad starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tikai skaitļu no 1 līdz 44 kvadrāti. No šiem 44 skaitļu kvadrātiem, tikai pāra skaitļu kvadrāti būs meklētie skaitļi, jo nepāra skaitli, kāpinot kvadrātā mēs iegūstam nepāra skaitli. Tātad kopā ir $\frac{44}{2} = 22$ skaitļi, kuri būtu kāda skaitļa kvadrāti.

3. Iespējamās *n* vērtības un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katru krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties $4 \cdot 3/2 = 6$ veidos.To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



4. Pieņemsim, ka Mārtiņš vienu cimdu pāri uzada x stundās, tad Mārtiņš un Marta uzadīja 5x+20 pārus, bet Pjērs un Mārtiņš 8x+14 pārus. Tā kā abi adītāju pāri uzadīja vienādu skaitu cimdu pāru, t.i., vienu cimdu bloku, tad $5x+20=8x+14$, no kurienes 3x = 6 un x = 2. Vienā cimdu blokā ir 5x+20 cimdu pāru jeb 10 + 20 = 30 cimdu pāru.

5. Jā, mājiņu ir iespējams uzzīmēt ar vienu pildspalvas vilkumu – skat. zīm. Mājiņu *ar skursteni* nav iespējams uzzīmēt. Pievēršam uzmanību krustpunktiem durvju un skursteņa pamatnē – no tiem iziet 3 līnijas (nepāra skaits). Tātad nav iespējams iziet no neviena no šiem punktiem divas reizes, taču tajos ir jānonāk vismaz divreiz. Šādi punkti var būt tikai divi – sākums un beigas. Tātad, lai būtu iespējams uzzīmēt zīmējumu ar vienu vilkumu, tieši divām (vai nevienai) virsotnei jābūt ar nepāra skaitu izejošu līniju. (Interesentiem: meklēt *Eilera kontūrs / cikls (Eulerian path / cycle)*)



6. $4a^4+b^4=(2a^2+b^2)-4a^2b^2=(2a^2+b^2-2ab)(2a^2+b^2+2ab)$

7. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OOO=OOO OOO<OOO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.
Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.
3. svēršana (1.gad) O=O O<O
Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas

2. svēršana (2.gad) O=O O<O

Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

8. p – pasažieru skaits pārpildītos autobusos
a – pārpildīto autobusu skaits
n – kopējais autobusu skaits
t – pasažieru skaits nepārpildītos autobusos

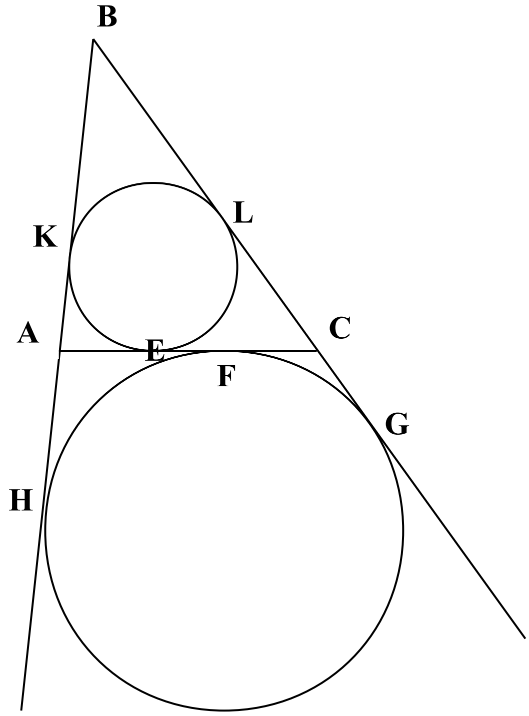
Pēc dotā $\frac{t}{p} < \frac{60(n-a)}{60a} = \frac{n}{a} - 1$, jo $t \le (n-a)60$ (katrā nepārpildītā autobusā ir ne vairāk par 60 pasažieriem) un p > 60a $\Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{60a}$ (katrā pārpildīta autobusā ir vairāk par 60 pasažieriem). Tāpēc $B = \frac{p}{p+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{p}} > \frac{1}{1+\frac{n}{a}-1} = \frac{a}{n} = A$.

Tiem, kuri zina, kas ir vidējais aritmētiskais lielums, piedāvājam arī alternatīvu risinājumu.
Ņemot vērā, ka ir vismaz viens nepārpildīts autobuss, vidējais pasažieru skaits pārpildītos autobusos būs lielākās nekā vidējais pasažieru skaits visos autobusos kopā, respektīvi, $\frac{p}{a} > \frac{p+t}{n}$. No šejienes iegūstam $B = \frac{p}{p+t} > \frac{a}{n} = A$.

9. Pieņemsim, ka visas trīs vienādības tiešām izpildās. Tad viens no saskaitāmajiem *km* un *ln* būs pāra skaitlis, bet otrs nepāra, citādi to summa nebūs nepāra skaitlis. Mēs varam pieņemt, ka *km* ir nepāra skaitlis, bet *ln* pāra skaitlis. Lai divu skaitļu reizinājums būtu nepāra skaitlis, abiem jābūt nepāra skaitļiem, bet lai reizinājums būtu pāra skaitlis vismaz vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad vismaz viens no skaitļiem *l* un *n* ir pāra skaitlis, bet *k* un *m* abi ir nepāra, kas nozīmē, ka vismaz viena no summām $k + l$ un $m + n$ ir nepāra skaitlis, bet pēc dotā abām summām vajadzēja būt pāra skaitļiem. Tātad sākotnējais pieņēmums nav iespējams.

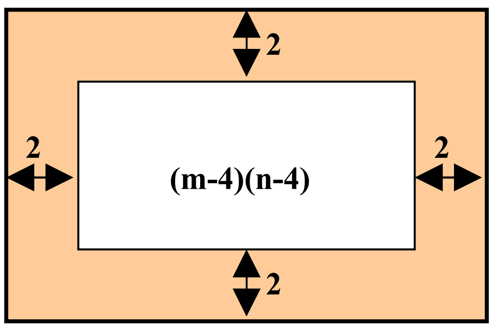
10. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu summa, būs nepāra skaitlis).

11. Tā kā pieskaru pret riņķa līniju, kas iziet no viena punkta, garumi ir vienādi, varam apzīmēt BK = BL = a, AK = AE = c, CE = CL = b. Apzīmēsim arī AH = AF = x, CG = CF = y. Tā kā BH = BG, varam rakstīt: $a+c+x=a+b+y$ jeb $b-x=y-c$, kā arī $x+y=AC=c+b$, no kā seko $c-y=b-x$ un $b-x=y-c=-(c-y)$, kas nozīmē, ka $c-y=0$, un līdz ar to $AE=c=y=FC$.



12. Tiešām var atrast tādas n vērtības, ka a + dn nav pirmskaitlis. Gadījumā, kad n = a, iegūstam a + dn = a(d+1), tātad šis skaitlis dalās ar a un d+1. Ja a>1, tad a(d+1) nav pirmskaitlis. Ja a = 1, tad n vērtībai n = d+2 izpildās $a+dn=1+d(d+2)=d^2+2d+1=(d+1)^2$, kas nav pirmskaitlis.

13. Pēc krāsošanas mēs iegūstam figūru, kas redzama zīmējumā.



Nokrāsotas tiek 2 kolonnas no abiem sāniem, kā arī 2 rindas no augšas un apakšas, tādēļ balto rūtiņu skaits būs $(m-4)(n-4)$, bet sarkano rūtiņu skaits būs $mn-(m-4)(n-4)$ (kopējais rūtiņu skaits mīnus balto rūtiņu skaits). Lai sarkano un balto rūtiņu skaits sakristu, jāizpildās vienādībai:

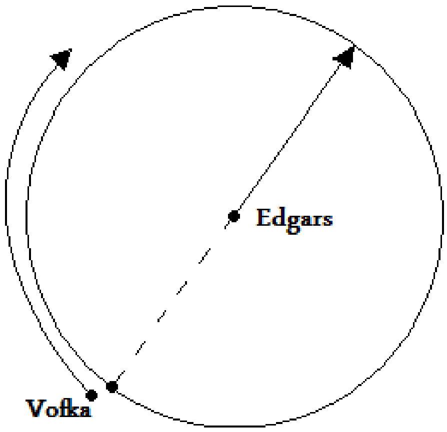
$$(m-4)(n-4)=mn-(m-4)(n-4),$$

kuru var pārveidot sekojoši

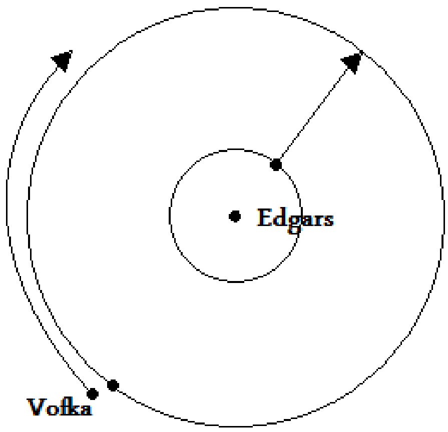
$$2(m-4)(n-4)-mn=0$$
$$mn-8n-8m+32=0$$
$$mn-8n-8m+64=32$$
$$(m-8)(n-8)=32$$

No šejienes ir skaidrs, ka $m-8$ un $n-8$ ir skaitļa 32 dalītāji. Tātad der šādas $m-8$ vērtības 1, 2, 4, 8, 16, 32 un to atbilstošās $n-8$ vērtības ir 32, 16, 8, 4, 2, 1. Tālāk var iegūt arī, ka m der šādas vērtības 9, 10, 12, 16, 24, 40 un atbilstošās n vērtības 40, 24,16, 12, 10, 9. Būtībā ir 3 taisnstūri (vai arī to versijas pagrieztas par 90°), kuriem izpildās uzdevuma nosacījumi – 9 x 40, 10 x 24 un 12 x 16.

14. Pieņemam riņķa rādiusu par 1 vienību. Gadījumā, kad x = 3 Edgars var vienkārši peldēt taisni uz krastu, pretēji Vofkas atrašanās vietai (skat. zīm. 1). Vofkam jānoskrien π, kamēr Edgaram jānopeld 1, kas nozīmē vieglu aizbēgšanu.
Gadījumā, kad x = 4, aizmukt joprojām ir iespējams, taču Edgaram krietni jāpasvīst. Lai to īstenotu, viņam jārīkojas sekojoši:
1) jānopeld 9/40 no centra jebkurā virzienā (kā varēs redzēt no tālākā sprieduma, der jebkurš attālums a, tāds, ka $\frac{(4-\pi)}{4} < a < \frac{1}{4}$;
2) jāpeld pa riņķi, kamēr Vofka atrodas diametrāli pretējā ezera punktā (skat. zīm. 2);
3) jāpeld taisni uz krastu.
Šī pieeja strādā, jo, atrodoties attālumā a, tuvāk par ¼ no centra, Edgara *leņķiskais ātrums* ir lielāks par Vofkas, un līdz ar to viņš var kustēties pa savu riņķi ar rādiusu a ātrāk, nekā Vofka skrien pa lielo riņķi ar rādiusu 1. Tiklīdz viņš būs sasniedzis 2) minēto punktu, viņam atliks nopeldēt 31/40, kamēr Vofkam jānoskrien π, tāpēc Edgars atkal spēs aizbēgt.



Zīm. 1



Zīm. 2

.

15. Jā, var. Aruna stratēģija ir sekojoša: pirmo plakātu viņš uzlīmē pašā sienas centrā. Kad Ašouks pieliek pie sienas savu plakātu, Arunam jāpielīmē viņa nākamais plakāts *simetriski Ašouka plakātam* attiecībā pret sienas centru. Tas ir vienmēr iespējams, jo ja kāda vieta, simetriski Ašouka plakātam, būtu aizņemta, tad pēc iepriekšējās konstrukcijas arī tai simestriskā vieta, proti, Ašouka plakāta aizņemtā vieta nebūtu brīva, kas neļautu Ašoukam uzlīmēt savu plakātu (jo gan siena, gan plakāti ir centrāli simetriski). Tā kā sienas laukums ir ierobežots, pienāks laiks, kad vietas aptrūksies. Arunam vietas aptrūkties nevar, līdz ar to Ašouks būs tas, kas vienu dienu vairs nevarēs uzlīmēt savu plakātu uz sienas, tāpēc Aruna plakātu būs vairāk. Jāpiezīmē, ka ir svarīgi, ka Aruns pielīmē savu pirmo plakātu centrā, tādējādi neizjaucot simetriju. Šis uzdevums izmanto *invarianta principu*, proti, tiek atrasta kāda vērtība vai īpašība, kas nemainās, lai arī ko darītu pretinieks. Šajā gadījumā invariants ir pozīcijas centrālā simetrija pēc katra Aruna uzlīmētā plakāta.