$$\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{2009\}$$

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 10 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Sadalīt reizinātājos $4a^4 + b^4$.

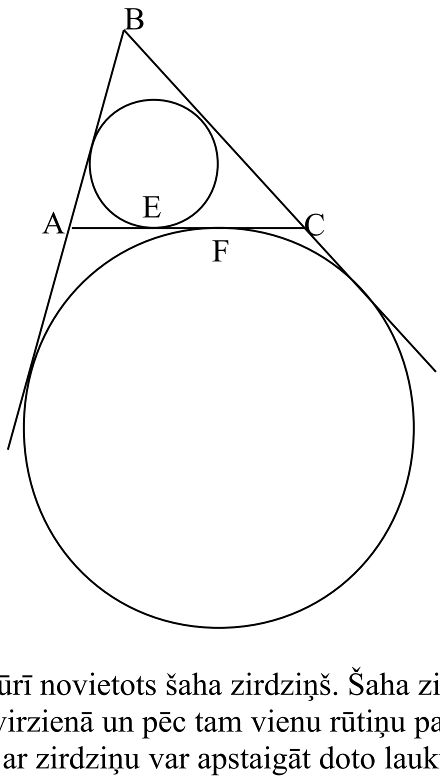
2. Kvadrāta ABCD iekšpusē ņemts tāds punkts P, ka ΔBPC ir vienādmalu trijstūris. Aprēķināt $\angle$APD.

3. Pie kādām naturālu skaitļu a, b, c, d vērtībām ir spēkā vienādība a + b + c + d= abcd?

4. Banka izkala 6 jubilejas monētas. Divas no monētām izrādījās brāķa – tās bija par 0,01 gramu vieglākas nekā parējās 4 monētās, kurām bija vienāds svars. Monetārā specvienība iegādājās smalkus sviru svarus, bet ar tiem dienas laikā var veikt tikai 3 svērienus, nezaudējot precizitāti. Vai monetārajai specvienībai ir iespējams dienas laikā atrast 4 pareizās monētas un laist tās apgrozībā?

5. Dots, ka k, l, m, n ir naturāli skaitļi. Vai vienlaicīgi var izpildīties 3 vienādības $k + l = 20$, $m + n = 6$, $km + ln = 89$?

6. Dots, ka AB, BC, AC abu riņķa līniju kopīgās pieskares, E un F pieskaršanās punkti. Pierādīt, ka AE = FC.



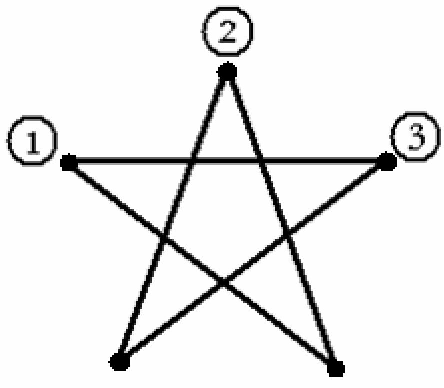
7. 5x6 rūtiņu laukuma stūrī novietots šaha zirdziņš. Šaha zirdziņš drīkst pārvietoties divas rūtiņas jebkurā virzienā un pēc tam vienu rūtiņu pa labi vai kreisi no sākotnējā kustības virziena. Vai ar zirdziņu var apstaigāt doto laukumu tā, lai katrā rūtiņā zirdziņš nostātos tieši vienu reizi? Vai to ir iespējams izdarīt pie nosacījuma, ja iepriekšējā gājienā zirdziņš ir sācis gājienu ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ, tad nākamajā gājienā tas sāk gājienu ar divām rūtiņām pa labi/kreisi, un otrādi, ja iepriekšējais gājiens ir sācies ar divām rūtiņām pa labi/kreisi, tad nākamajam gājienam jāsākas ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ?

8. Pierādīt, ka skaitlim $(2009\,!)^{2008}$ ir nepāra skaits dalītāju. Ar n! apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n.

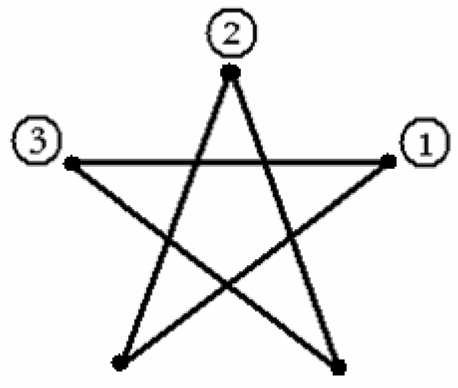
9. Uz Orbitreku planētas visi Orbitreki, kas kaut vienu reizi ir paspieduši roku kādam citam Orbitrekam, dzīvo mūžīgi. Vai no visiem Orbitrekiem tādi, kas izdarījuši nepāra skaita rokas spiedienu, ir pāra vai nepāra skaits?

10. Pieņemsim, ka a un d ir doti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka a+dn nevar būt pirmskaitlis visām naturālām n vērtībām.

11. Ar katru gājienu vienu žetonu (attēlos tie numurēti ar cipariem 1,2,3) drīkst pārvietot uz brīvu pretējo virsotni. Vai ar šādiem gājieniem iespējams pārveidot 1. attēlu par 2.?



1. attēls



2. attēls

12. Mazais Edgars peldas ezerā, kuram ir riņķa forma. Esot pašā ezera vidū, viņš pamana krastā kaimiņu Vofku, kurš viņu skolā vienmēr sit un atņem pusdienu naudu. Tā kā Vofka ir tikko paēdis, viņš nevar peldēt un tāpēc cer noķert Edgaru krastā. Zināms, ka Vofka skrien x reizes ātrāk nekā Edgars peld, bet, būdams skolas skvoša čempions, Edgars var viegli aizmukt no Vofkas, esot uz sauszemes. Vai Edgaram izdosies tikt mājās sveikam un veselam, ja x = 3 ? Kāda ir atbilde gadījumā x = 4 ? Riņķa līnijas garumu aprēķina pēc formulas $c = 2\pi r$, kur r –riņķa rādiuss un skaitļa π aptuvenā vērtība ir 3,14.

13. Vai izliektu septiņstūri, kuram visas malas ir vienādas, iespējams sagriezt galīgā skaitā paralelogramu?

14. Klasē ir 35 skolēni. Viņi vēlas izlozēt 11 cilvēku futbola komandu, no kuriem viens ir kapteinis. Tika nolemts vispirms izlozēt komandas dalībniekus, un tad no tiem kapteini. Taču Renārs uzstāja, ka vispirms jāizlozē kapteinis, un tad pārējā komanda. Vai šī pieeja palielina Renāra izredzes kļūt par kapteini?

15. Aruns un Ašouks ir istabas biedri kopmītnēs. Viņi ir sarunājuši, ka istabā viena siena (visām sienām ir taisnstūra forma) tiks atvēlēta plakātiem. Aruns abonē avīzi “Mama” (iznāk piektdienās), bet Ašouks - “Lama” (šī iznāk sestdienās). Katrā avīzē ir viens plakāts A3 formātā, ko katrs no puišiem uzlīmē uz sienas brīvā vietā (t.i. nepārklājoties ar jau esošajiem plakātiem). Kad viņi ievācās istabā pirmdien, siena bija tukša. Vai Aruns var panākt, ka “Mama” plakāti ir vairākumā, kad uz sienas vairs nav brīvas vietas jauniem plakātiem?