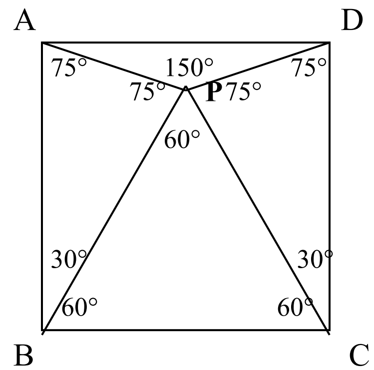
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

9. klases uzdevumu atrisinājumi

1. $4a^4+b^4=(2a^2+b^2)-4a^2b^2=(2a^2+b^2-2ab)(2a^2+b^2+2ab)$

2. ΔBPC ir vienādmalu trijstūris, tādēļ visi tā leņķi ir 60°. $\angle$ABC = 90° (ABCD-kvadrāts), tādēļ $\angle$ABP = 90°-$\angle$PBC = 30°. Pēc dotā BP = BC un, tā kā AB = BC (ABCD-kvadrāts), tad AB = BP, no kurienes $\angle$BPA = $\angle$BAP = $\frac{(180°-30°)}{2}$ = 75°. Analogi spriežot par trijstūri CPD, mēs iegūstam, ka arī $\angle$CPD = 75°. Tātad $\angle$APD = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.



3. Pieņemsim, ka d ir lielākais no skaitļiem un pārējos pēc lieluma var sakārtot šādi $a \le b \le c \le d$. Skaidrs, ka $abcd = a+b+c+d \le 4d$ un $abc \le 4$. Iespējamās a, b, c vērtības, lai izpildītos nevienādībā, attiecīgi ir (1, 1, 4), (1, 2, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 1, 1). Varam aprēķināt arī atbilstošās d vērtības (no $d=\frac{a+b+c}{abc-1}$): 2 (neder tāpēc, ka tad d nav lielākais no skaitļiem), $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$, 4 un pēdējais gadījums nav iespējams. Acīmredzot der tikai vērtībā d = 4, no kurienes arī iegūstam 4 skaitļus, kuriem izpildās dotā vienādība – 1, 1, 2, 4. Jāveic pārbaude.

4. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana OOO=OOO OOO<OOO

Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.

2. svēršana (1.gad) O=O O<O

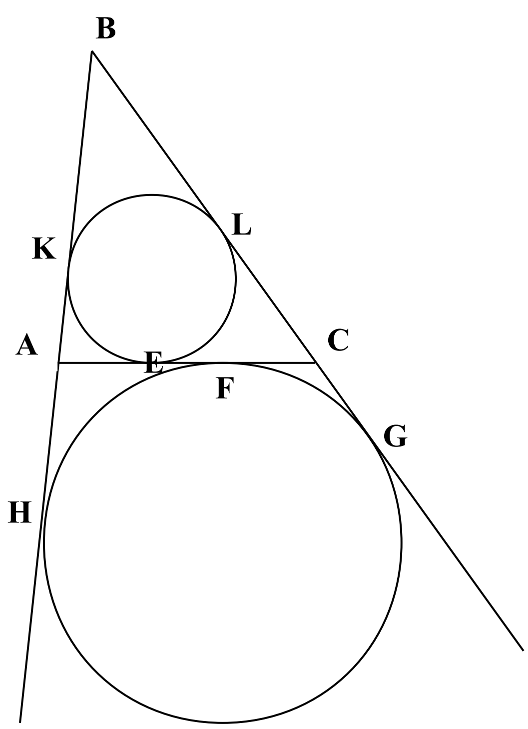
Atkal ir iespējami divi iznākumi:

1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.
Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.
3. svēršana (1.gad) O=O O<O
Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas
2. svēršana (2.gad) O=O O<O
Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

5. Pieņemsim, ka visas trīs vienādības tiešām izpildās. Tad viens no saskaitāmajiem *km* un *ln* būs pāra skaitlis, bet otrs nepāra, citādi to summa nebūs nepāra skaitlis. Mēs varam pieņemt, ka *km* ir nepāra skaitlis, bet *ln* pāra skaitlis. Lai divu skaitļu reizinājums būtu nepāra skaitlis, abiem jābūt nepāra skaitļiem, bet lai reizinājums būtu pāra skaitlis vismaz vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad vismaz viens no skaitļiem *l* un *n* ir pāra skaitlis, bet *k* un *m* abi ir nepāra, kas nozīmē, ka vismaz viena no summām $k + l$ un $m + n$ ir nepāra skaitlis, bet pēc dotā abām summām vajadzēja būt pāra skaitļiem. Tātad sākotnējais pieņēmums nav iespējams.

6. Tā kā pieskaru pret riņķa līniju, kas iziet no viena punkta, garumi ir vienādi, varam apzīmēt BK = BL = a, AK = AE = c, CE = CL = b. Apzīmēsim arī AH = AF = x, CG = CF = y. Tā kā BH = BG, varam rakstīt:
$a + c + x = a + b + y$ jeb
$b - x = y - c$, kā arī
$x + y = AC = c + b$, no kā seko
$c - y = b - x$ un
$b - x = y - c = -(c - y)$, kas nozīmē, ka $c - y = 0$, un līdz ar to AE = c = y = FC.

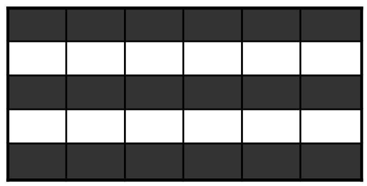


7. Jā, var. Skat. zīm.

2	9	22	15	4	29
21	14	3	10	23	16
8	1	24	17	28	5
13	20	7	26	11	18
	25	12	19	6	27

Ar pelēko lauciņu apzīmēta zirdziņa sākotnējā atrašanās vieta. Ar skaitļiem apzīmētā gājienu secībā, kāda zirdziņš var nostāties uz dotā laukuma visām rūtiņām.

Pieņemsim, ka pie dotā nosacījuma zirdziņš spēs apstaigāt laukumu, katrā rūtiņā nostājoties tieši vienu reizi. Iekrāsosim laukuma katru otro rindiņu melnā krāsā, kā parādīts zīmējumā.



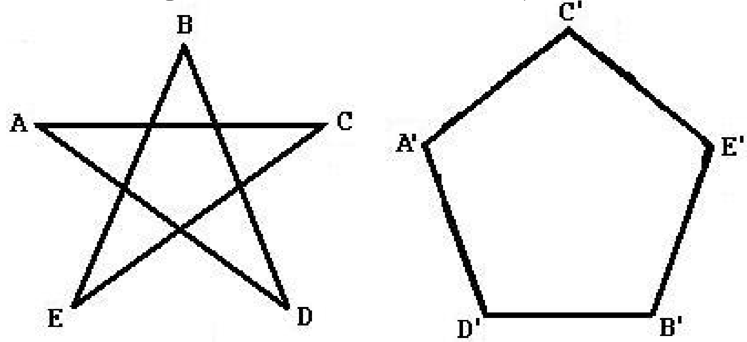
Gājienus, kas sākti ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ apzīmēsim ar V, bet gājienus, kas sākti ar divām rūtiņām pa labi/kreisi ar H. Tā kā, veicot gājienu H zirdziņš, maina rūtiņās krāsu, uz kuras tas stāv, bet, veicot gājienu V, nemaina rūtiņas krāsu, tad skaidrs, ka, veicot gājienu sēriju HV, zirdziņš pa ceļam būs nostājies uz divām vienas krāsas rūtiņām. Savukārt, veicot gājienu sēriju HVHV, zirdziņš pa ceļam būs nostājies uz 2 baltajām un 2 melnajām rūtiņām. Zinot, ka zirdziņš no sākotnējās rūtiņas veiks 29 gājienus (pamīšus H un V), var secināt, ka zirdziņš veiks 7 HVHV gājienu sērijas, tātad pa ceļam būs nostājies uz 14 baltajām rūtiņām. Uz dotā laukuma ir palikušas neiekrāsotas tikai 12 baltās rūtiņas, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir pretrunīgs un zirdziņš nespēs apstaigāt laukumu, katrā rūtiņā nostājoties tieši vienu reizi.

8. Šī uzdevuma galvenā ideja ir, ka jebkuram naturāla skaitļa kvadrātam dalītāju skaits ir nepāra. Tiešām, pieņemsim $n = x^2$. Ja d ir n dalītājs, tad arī $\frac{n}{d}$ ir n dalītājs. Tas nozīmē, ka mēs varam sadalīt visus dažādos n dalītājus pāros, izņemot d = x, jo tad $d = x = \frac{d}{n}$.
Tātad n dalītāju skaits ir nepāra skaitlis. $(2009!)^{2008} = ((2009!)^{1004})^2$ tāpēc tā dalītāju skaits ir nepāra.

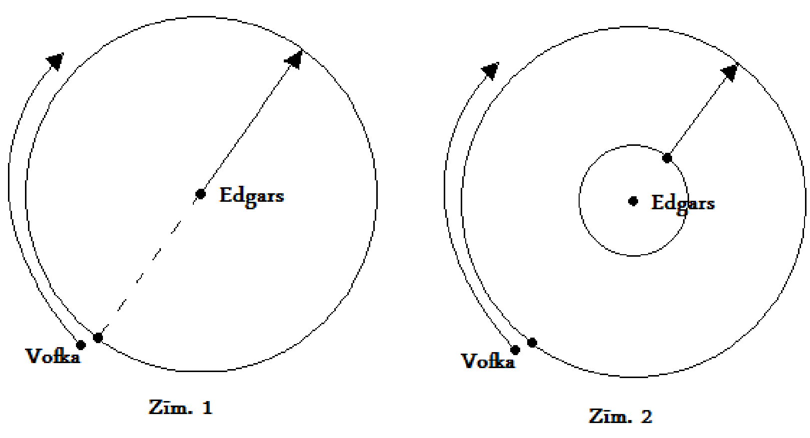
9. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu, summa, būs nepāra skaitlis).

10. Tiešām var atrast tādas n vērtības, ka a + dn nav pirmskaitlis. Gadījumā, kad n = a, iegūstam a + dn = a(d+1), tātad šis skaitlis dalās ar a un d+1. Ja a>1, tad a(d+1) nav pirmskaitlis. Ja a = 1, tad n vērtībai n = d+2 izpildās $a + dn = 1 + d(d+2) = d^2 + 2d + 1 = (d+1)^2$, kas nav pirmskaitlis.

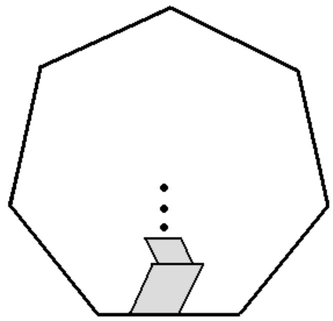
11. „Atlokot" piecstaru zvaigzni ABCDE, iegūstam regulāru piecstūri A'B'C'D'E'. Žetonu pārvietošanu starp zvaigznes virsotnēm var identificēt ar pārvietošanu pa piecstūra malām (piem. A→C atbilst A'→C'). Sākotnēji žetoni 1,2,3 atrodas virsotnēs A,B,C. Tātad, ejot pret pulksteņrādītāja virzienu ap piecstūri, sākot ar žetonu 1, vispirms sekos žetons 2, tad 3. Tā kā ar atļautajiem gājieniem nav iespējams šo secību izjaukt, nav iespējams panākt, ka virsotnēs A,B,C žetoni ir secībā 3,2,1 (jo tad piecstūrī, ejot pret pulksteņa rādītāja virzienu no žetona 1, vispirms sekotu žetons 3, tad 2).



12. Pieņemam riņķa rādiusu par 1 vienību. Gadījumā, kad x = 3 Edgars var vienkārši peldēt taisni uz krastu, pretēji Vofkas atrašanās vietai (skat. zīm. 1). Vofkam jānoskrien π, kamēr Edgaram jānopeld 1, kas nozīmē vieglu aizbēgšanu.
Gadījumā, kad x = 4, aizmukt joprojām ir iespējams, taču Edgaram krietni jāpasvīst. Lai to īstenotu, viņam jārīkojas sekojoši:
1) jānopeld 9/40 no centra jebkurā virzienā (kā varēs redzēt no tālākā sprieduma, der jebkurš attālums a, tāds, ka $\frac{(4-\pi)}{4} < a < \frac{1}{4}$;
2) jāpeld pa riņķi, kamēr Vofka atrodas diametrāli pretējā ezera punktā (skat. zīm. 2);
3) jāpeld taisni uz krastu.
Šī pieeja strādā, jo, atrodoties attālumā a, tuvāk par ¼ no centra, Edgara *leņķiskais ātrums* ir lielāks par Vofkas, un līdz ar to viņš var kustēties pa savu riņķi ar rādiusu a ātrāk, nekā Vofka skrien pa lielo riņķi ar rādiusu 1. Tiklīdz viņš būs sasniedzis 2) minēto punktu, viņam atliks nopeldēt 31/40, kamēr Vofkam jānoskrien π, tāpēc Edgars atkal spēs aizbēgt.



13. Nē, nav. Tagad pieņemsim pretējo – tāds sadalījums eksistē. Tādā gadījumā kādam no paralelogramiem tā vienai malai ir daļēji jāsakrīt ar kādu no 7-stūra malām, kurai nav paralēla neviena cita mala (ja šādu malu nebūtu iespējams atrast, tad būtu trīs malas, kas ir savstarpēji paralēlas, bet izliektam 7-stūrim, tas nav iespējams). Kāda cita paralelograma malai savukārt daļēji jāsakrīt ar iepriekšējā paralelograma pretējo malu utt. (zīm 3.), izveidojot paralēlu nogriežņu virkni. Tā kā paralelogramu ir galīgs skaits, kādai no citām 7-stūra malām ir daļēji jāsakrīt ar pēdējo nogriezni šajā virknē, bet tas nav iespējams, jo tas ir pretrunā ar nosacījumu, ka sākotnējā šīs virknes mala nav paralēla ne ar vienu citu 7-stūra malu.



Zīm. 3

14. Abās minētajās izlozes procedūrās visi skolēni ir pilnīgi vienlīdzīgi; tādējādi var teikt, ka procedūras ir simetriskas pret visiem skolēniem. Tas nepierāda, ka abas procedūras ir vienādas! Taču pierāda, ka ikviens patiess apgalvojums (saistīts ar izlozi) par Renāru būs spēkā arī par jebkuru citu skolēnu. Tādējādi skolēnu izredzes kļūt par kapteini, izmantojot pirmo pieeju, ir vienādas, 1/35. Līdzīgi arī Renāra ierosinātajā procedūrā.
Secinājums: Simetrijas argumenti, lietoti uzmanīgi, ir vērtīgi uzdevumu risināšanā.

Tiem, kas pazīstami ar kombinatorikas elementiem, ir noderīgi arī apskatīt alternatīvu risinājumu.

No n elementiem k elementus var izvēlēties $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ veidos.

Apskatīsim pirmo izlozes veidu. No 35 skolēniem 11 var izvēlēties C_n^{11} veidos, visi vienlīdz iespējami (tātad varbūtība $\dfrac{1}{C_{35}^{11}}$ katram sastāvam). No šiem tieši C_{34}^{10} sastāvos ir Renārs (jo ir jāizvēlas 10 citi cilvēki no 34 pārējiem). Gadījumā, ja Renārs tiek komandā, tad viņa izredzes kļūt par kapteini ir 1/11. Tātad kopumā Renāra izredzes kļūt par kapteini šajā gadījumā ir $\dfrac{1}{11}(C_{34}^{10} / C_{35}^{11}) = \dfrac{1}{11} \cdot \dfrac{(35-1)!}{10!(35-11)!} \cdot \dfrac{11!(35-11)!}{35!} = \dfrac{1}{35}$ (pārējie reizinātāji saucējā un skaitītājā noīsinās). Tātad varbūtība ir tāda pati, kā Renāra ierosinātajā gadījumā, kad uzreiz no 35 skolēniem tiek izvēlēts 1 kapteinis.

15. Jā, var. Aruna stratēģija ir sekojoša: pirmo plakātu viņš uzlīmē pašā sienas centrā. Kad Ašouks pieliek pie sienas savu plakātu, Arunam jāpielīmē viņa nākamais plakāts *simetriski Ašouka plakātam* attiecībā pret sienas centru. Tas ir vienmēr iespējams, jo ja kāda vieta, simetriski Ašouka plakātam, būtu aizņemta, tad pēc iepriekšējās konstrukcijas arī tai simestriskā vieta, proti, Ašouka plakāta aizņemtā vieta nebūtu brīva, kas neļautu Ašoukam uzlīmēt savu plakātu (jo gan siena, gan plakāti ir centrāli simetriski). Tā kā sienas laukums ir ierobežots, pienāks laiks, kad vietas aptrūksies. Arunam vietas aptrūkties nevar, līdz ar to Ašouks būs tas, kas vienu dienu vairs nevarēs uzlīmēt savu

plakātu uz sienas, tāpēc Aruna plakātu būs vairāk.
Jāpiezīmē, ka ir svarīgi, ka Aruns pielīmē savu pirmo plakātu centrā, tādējādi neizjaucot simetriju. Šis uzdevums izmanto *invarianta principu*, proti, tiek atrasta kāda vērtība vai īpašība, kas nemainās, lai arī ko darītu pretinieks. Šajā gadījumā invariants ir pozīcijas centrālā simetrija pēc katra Aruna uzlīmētā plakāta.