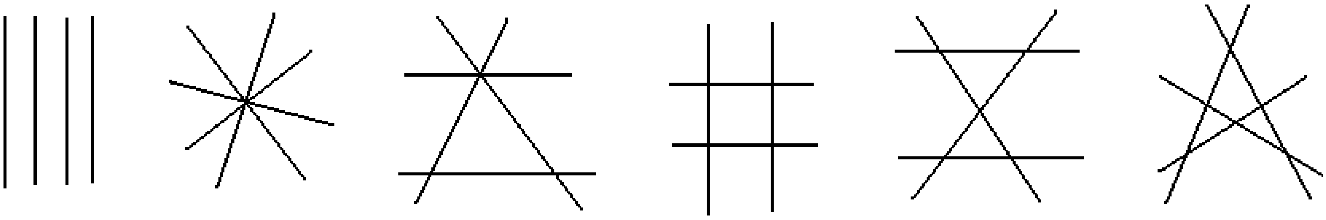
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

7. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Pilnā riņķi ir 60 minūtes un 360°, tātad viena minūte atbilst 6 grādiem. 20 minūtes attiecīgi būs 120° (ja plkst. 12.00 ir 0°), bet stundu rādītājs stāvēs uz $50+\frac{20}{60}*5=51\frac{2}{3}$ minūtēm, tātad būs 310°. Leņķis starp rādītājiem būs 310°-120°=190° grādi (jeb 170°).

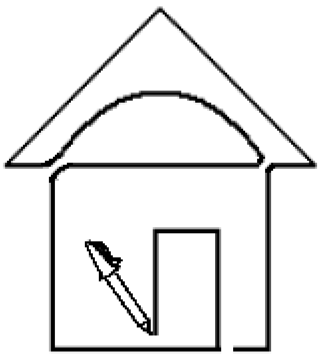
2. Iespējamās *n* vērtības un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties 4·3/2=6 veidos.To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



0 1 3 4 5 6

3. Viegli pārliecināties, ka $44^2 < 2009 < 45^2$, tātad starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tikai skaitļu no 1 līdz 44 kvadrāti. No šiem 44 skaitļu kvadrātiem, tikai pāra skaitļu kvadrāti būs meklētie skaitļi, jo nepāra skaitli, kāpinot kvadrātā mēs iegūstam nepāra skaitli. Tātad kopā ir $\frac{44}{2}$ = 22 skaitļi, kuri būtu kāda skaitļa kvadrāti.

4. Jā, mājiņu ir iespējams uzzīmēt ar vienu pildspalvas vilkumu – skat. zīm. Mājiņu *ar skursteni* nav iespējams uzzīmēt. Pievēršam uzmanību krustpunktiem durvju un skursteņa pamatnē – no tiem iziet 3 līnijas (nepāra skaits). Tātad nav iespējams iziet no neviena no šiem punktiem divas reizes, taču tajos ir jānonāk vismaz divreiz. Šādi punkti var būt tikai divi – sākums un beigas. Tātad, lai būtu iespējams uzzīmēt zīmējumu ar vienu vilkumu, tieši divām (vai nevienai) virsotnei jābūt ar nepāra skaitu izejošu līniju. (Interesentiem: meklēt *Eilera kontūrs / cikls (Eulerian path / cycle)*)



5. Pieņemsim, ka Mārtiņš vienu cimdu pāri uzada x stundās, tad Mārtiņš un Marta uzadīja 5x+20 pārus, bet Pjērs un Mārtiņš 8x+14 pārus. Tā kā abi adītāju pāri uzadīja vienādu skaitu cimdu pāru, t.i., vienu cimdu bloku, tad $5x+20=8x+14$, no kurienes 3x = 6 un x = 2. Vienā cimdu blokā ir 5x+20 cimdu pāru jeb 10 + 20 = 30 cimdu pāru.

6. Tā kā pie šāda māja novietojuma no numerācijas viedokļa ielas sākums sakrīt ar ielas beigām, tad no 78. mājas līdz ielas beigām ir tieši tikpat māju, cik no 37. mājas līdz ielas sākumam, t.i., 36 mājas. Tātad pēdējās mājas numurs ir $78+36=114$, kas attiecīgi nozīmē, ka uz šīs ielas pavisam ir 114 mājas.

7. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana	OOO=OOO	OOO<OOO

Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.

2. svēršana (1.gad)	O=O	O<O

Atkal ir iespējami divi iznākumi:
1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.

Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.

3. svēršana (1.gad)	O=O	O<O

Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas

2. svēršana (2.gad)	O=O	O<O

Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

8. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu summa, būs nepāra skaitlis).

9. Jā, var. Skat. zīm.

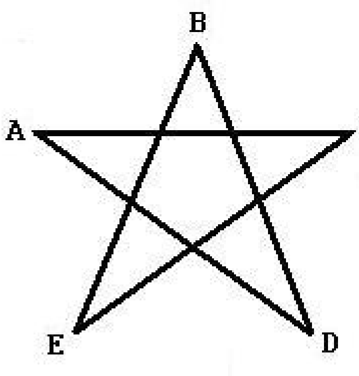
2	9	22	15	4	29
21	14	3	10	23	16
8	1	24	17	28	5
13	20	7	26	11	18
	25	12	19	6	27

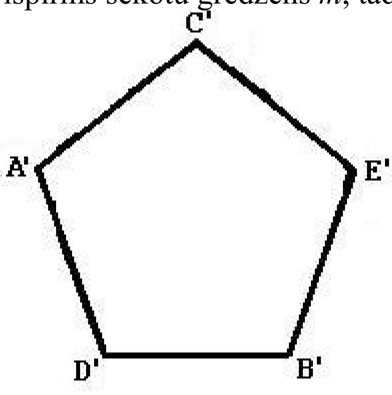
Ar pelēko lauciņu apzīmēta zirdziņa sākotnējā atrašanās vieta. Ar skaitļiem apzīmētā gājienu secībā, kāda zirdziņš var nostāties uz dotā laukuma visām rūtiņām.

10. Šī uzdevuma galvenā ideja ir, ka jebkuram naturāla skaitļa kvadrātam dalītāju skaits ir nepāra. Tiešām, pieņemsim $n = x^2$. Ja d ir n dalītājs, tad arī $\frac{n}{d}$ ir n dalītājs. Tas nozīmē, ka mēs varam sadalīt visus dažādos n dalītājus pāros, izņemot d = x, jo tad $d = x = \frac{d}{n}$. Tātad n dalītāju skaits ir nepāra skaitlis. $2009^{2008} = (2009^{1004})^2$ tāpēc tā dalītāju skaits ir nepāra.

11. Divu dažādu naturālu skaitļu (ne lielāku par 100) summa var būt robežās no 3 līdz 199 (ieskaitot), tātad 197 dažādas iespējas. Divus dažādus skaitļus no divdesmit viena var izvēlēties 21·20/2=210 veidos. Tātad, ja apskatīsim visas šādas summas, pēc Dirihlē principa (jeb „trušu un būrīšu" principa) iegūstam, ka starp tām eksistē divas summas, a + b un c + d, kas ir vienādas. Turklāt, nevar gadīties, ka kāds skaitlis izmantots abās summās (piem., ka a = c – jo tad arī b = d, tātad patiesībā tas ir viens un tas pats skaitļu pāris). Tādējādi esam ieguvuši nepieciešamos četrus dažādos skaitļus no dotajiem.

12. „Atlokot" piecstaru zvaigzni ABCDE, iegūstam regulāru piecstūri A'B'C'D'E'. Gredzenu pārvietošanu starp zvaigznes virsotnēm var identificēt ar pārvietošanu pa piecstūra malām (piem. A→C atbilst A'→C'). Lietosim saīsinājumus *b* (balts), *m* (melns) un *s* (strīpains). Sākotnēji gredzeni *s, b, m* atrodas virsotnēs A,B,C. Tātad, ejot pret pulksteņrādītāja virzienu ap piecstūri, sākot ar gredzenu *s*, vispirms sekos gredzens *b*, tad *m*. Tā kā ar atļautajiem gājieniem nav iespējams šo secību izjaukt, nav iespējams panākt, ka virsotnēs A,B,C ir gredzeni secībā *s, m, b* (jo tad piecstūrī, ejot pret pulksteņa rādītāja virzienu no gredzena *s*, vispirms sekotu gredzens *m*, tad *b*).





13. p – pasažieru skaits pārpildītos autobusos
a – pārpildīto autobusu skaits
n – kopējais autobusu skaits
t – pasažieru skaits nepārpildītos autobusos

Pēc dotā $\frac{t}{p} < \frac{60(n-a)}{60a} = \frac{n}{a} - 1$, jo $t \le (n-a)60$ (katrā nepārpildītā autobusā ir ne vairāk par 60 pasažieriem) un p > 60a$\Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{60a}$ (katrā pārpildīta autobusā ir vairāk par 60 pasažieriem). Tāpēc $B = \frac{p}{p+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{p}} > \frac{1}{1+\frac{n}{a}-1} = \frac{a}{n} = A$.

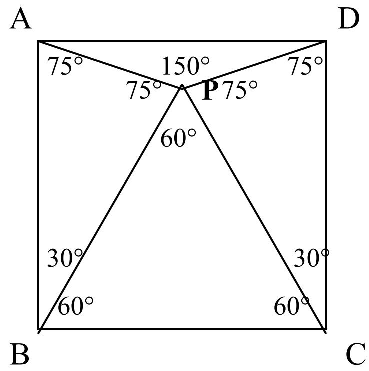
Tiem, kuri zina, kas ir vidējais aritmētiskais lielums, piedāvājam arī alternatīvu risinājumu.
Ņemot vērā, ka ir vismaz viens nepārpildīts autobuss, vidējais pasažieru skaits pārpildītos autobusos būs lielākās nekā vidējais pasažieru skaits visos autobusos kopā, respektīvi, $\frac{p}{a} > \frac{p+t}{n}$. No šejienes iegūstam $B = \frac{p}{p+t} > \frac{a}{n} = A$.

14. a) Iedomāsimies, ka dotais pavadoņu stāvoklis bija 0. mēnesī. Pirmais pavadonis ik pēc 4 mēnešiem atgriezīsies sākotnējā stāvokli (4. mēnesī, 8. mēnesī, 12. mēnesī ...), otrais pavadonis ik pēc 6 mēnešiem (6. mēnesī, 12.mēnesī), trešais ik pēc 10 mēnešiem utt. Skaidrs, ka stāvoklis būs tāds pats, kad mēneša kārtas numurs dalīsies ar katra pavadoņa apriņķošanas perioda ilgumu. Tātad šis stāvoklis atkārtosies MKD(4,6,10,20,22)=660. mēnesī ,t.i., pēc 660 mēnešiem.
b) Lai pavadonis atrastos uz sākotnējās taisnes, tas var būt vai nu sākotnējā pozīcijā, vai diametrāli pretējā orbītas punktā. Kādā no šīm divām pozīcijām pavadonis nokļūs periodiski laika posmā, kas ir divreiz īsāks nekā Zemes apriņķošanai nepieciešamais laiks. Tātad šajā gadījumā, līdzīgi spriežot kā a) gadījumā, uz šis pašas taisnes pavadoņi būs pēc MKD(2,3,5,10,11) = 330 mēnešiem.

15. Jā, ir iespējams. Piemēram, ar šādu stratēģiju: pirmais rūķītis izskaita sarkano cepuru skaitu uz pārējo 6 rūķīšu galvām. Ja tas ir pāra skaitlis, viņš izsaka minējumu „sarkana” (ja nepāra – min „zila”), tādējādi nododot pārējiem rūķīšiem informāciju par sarkano cepuru skaita paritāti. Tā kā katrs no šiem 6 rūķīšiem redz pārējo piecu cepures, viņš var viegli secināt un pareizi uzminēt savas cepures krāsu (piemēram, ja pirmais min „zila”, tad otrais zina, ka uz viņa un pārējo 5 rūķīšu galvām kopā ir nepāra skaits sarkanu cepuru. Ja starp pārējiem pieciem ir pāra skaits, tad otrajam ir sarkana cepure, citādi – zila. utt.) Piebildīsim, ka arī pirmajam rūķītim ir 50/50 izredzes iekļūt ballē (ja Sarkangalvīte nav noklausījusies stratēģiju).

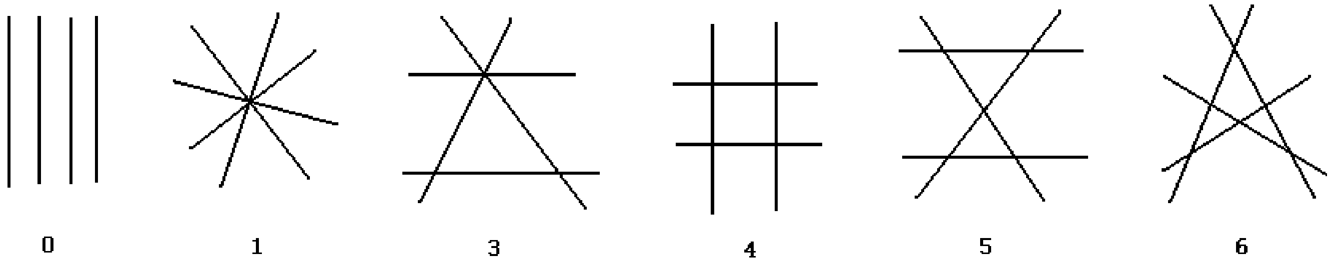
8. klases uzdevumu atrisinājumi

1. ΔBPC ir vienādmalu trijstūris, tādēļ visi tā leņķi ir 60°. $\angle$ABC = 90° (ABCD-kvadrāts), tādēļ $\angle$ABP = 90°-$\angle$PBC = 30°. Pēc dotā BP = BC un, tā kā AB = BC (ABCD-kvadrāts), tad AB = BP, no kurienes $\angle$BPA = $\angle$BAP = $\frac{(180°-30°)}{2}$ = 75°. Analogi spriežot par trijstūri CPD, mēs iegūstam, ka arī $\angle$CPD = 75°. Tātad $\angle$APD = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.



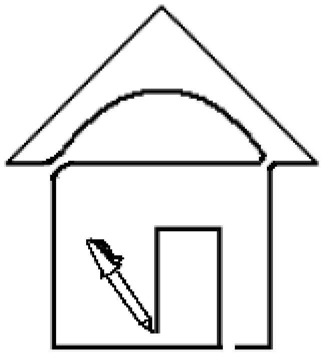
2. Viegli pārliecināties, ka $44^2 < 2009 < 45^2$, tātad starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tikai skaitļu no 1 līdz 44 kvadrāti. No šiem 44 skaitļu kvadrātiem, tikai pāra skaitļu kvadrāti būs meklētie skaitļi, jo nepāra skaitli, kāpinot kvadrātā mēs iegūstam nepāra skaitli. Tātad kopā ir $\frac{44}{2}$ = 22 skaitļi, kuri būtu kāda skaitļa kvadrāti.

3. Iespējamās *n* vērtības un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katru krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties 4·3/2=6 veidos.To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



4. Pieņemsim, ka Mārtiņš vienu cimdu pāri uzada x stundās, tad Mārtiņš un Marta uzadīja 5x+20 pārus, bet Pjērs un Mārtiņš 8x+14 pārus. Tā kā abi adītāju pāri uzadīja vienādu skaitu cimdu pāru, t.i., vienu cimdu bloku, tad $5x+20=8x+14$, no kurienes 3x = 6 un x = 2. Vienā cimdu blokā ir 5x+20 cimdu pāru jeb 10 + 20 = 30 cimdu pāru.

5. Jā, mājiņu ir iespējams uzzīmēt ar vienu pildspalvas vilkumu – skat. zīm. Mājiņu *ar skursteni* nav iespējams uzzīmēt. Pievēršam uzmanību krustpunktiem durvju un skursteņa pamatnē – no tiem iziet 3 līnijas (nepāra skaits). Tātad nav iespējams iziet no neviena no šiem punktiem divas reizes, taču tajos ir jānonāk vismaz divreiz. Šādi punkti var būt tikai divi – sākums un beigas. Tātad, lai būtu iespējams uzzīmēt zīmējumu ar vienu vilkumu, tieši divām (vai nevienai) virsotnei jābūt ar nepāra skaitu izejošu līniju. (Interesentiem: meklēt *Eilera kontūrs / cikls (Eulerian path / cycle)*)



6. $4a^4+b^4=(2a^2+b^2)-4a^2b^2=(2a^2+b^2-2ab)(2a^2+b^2+2ab)$

7. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OOO=OOO OOO<OOO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.
Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.
3. svēršana (1.gad) O=O O<O
Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas

2. svēršana (2.gad) O=O O<O

Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

8. p – pasažieru skaits pārpildītos autobusos
a – pārpildīto autobusu skaits
n – kopējais autobusu skaits
t – pasažieru skaits nepārpildītos autobusos

Pēc dotā $\frac{t}{p} < \frac{60(n-a)}{60a} = \frac{n}{a} - 1$, jo $t \le (n-a)60$ (katrā nepārpildītā autobusā ir ne vairāk par 60 pasažieriem) un p > 60a $\Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{60a}$ (katrā pārpildīta autobusā ir vairāk par 60 pasažieriem). Tāpēc $B = \frac{p}{p+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{p}} > \frac{1}{1+\frac{n}{a}-1} = \frac{a}{n} = A$.

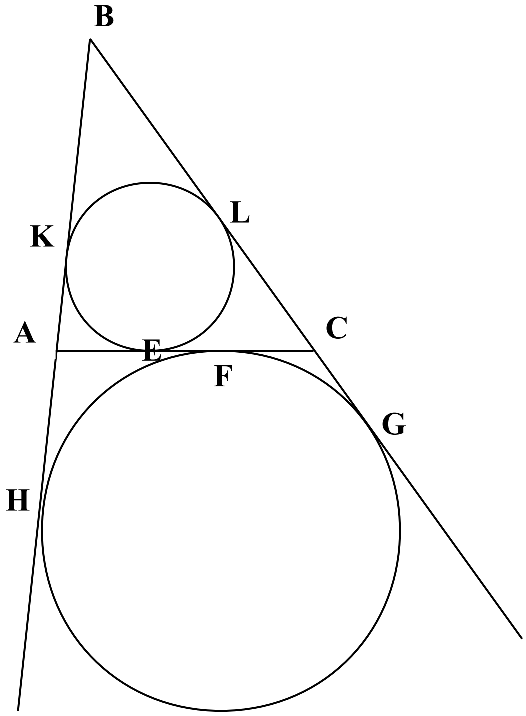
Tiem, kuri zina, kas ir vidējais aritmētiskais lielums, piedāvājam arī alternatīvu risinājumu.

Ņemot vērā, ka ir vismaz viens nepārpildīts autobuss, vidējais pasažieru skaits pārpildītos autobusos būs lielākās nekā vidējais pasažieru skaits visos autobusos kopā, respektīvi, $\frac{p}{a} > \frac{p+t}{n}$. No šejienes iegūstam $B = \frac{p}{p+t} > \frac{a}{n} = A$.

9. Pieņemsim, ka visas trīs vienādības tiešām izpildās. Tad viens no saskaitāmajiem *km* un *ln* būs pāra skaitlis, bet otrs nepāra, citādi to summa nebūs nepāra skaitlis. Mēs varam pieņemt, ka *km* ir nepāra skaitlis, bet *ln* pāra skaitlis. Lai divu skaitļu reizinājums būtu nepāra skaitlis, abiem jābūt nepāra skaitļiem, bet lai reizinājums būtu pāra skaitlis vismaz vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad vismaz viens no skaitļiem l un n ir pāra skaitlis, bet k un m abi ir nepāra, kas nozīmē, ka vismaz viena no summām $k + l$ un $m + n$ ir nepāra skaitlis, bet pēc dotā abām summām vajadzēja būt pāra skaitļiem. Tātad sākotnējais pieņēmums nav iespējams.

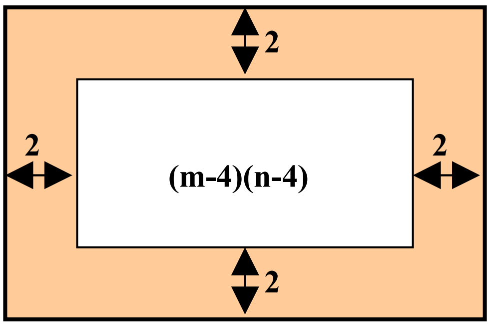
10. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu summa, būs nepāra skaitlis).

11. Tā kā pieskaru pret riņķa līniju, kas iziet no viena punkta, garumi ir vienādi, varam apzīmēt BK = BL = a, AK = AE = c, CE = CL = b. Apzīmēsim arī AH = AF = x, CG = CF = y. Tā kā BH = BG, varam rakstīt: $a+c+x=a+b+y$ jeb $b-x=y-c$, kā arī $x+y=AC=c+b$, no kā seko $c-y=b-x$ un $b-x=y-c=-(c-y)$, kas nozīmē, ka $c-y=0$, un līdz ar to $AE=c=y=FC$.



12. Tiešām var atrast tādas n vērtības, ka a + dn nav pirmskaitlis. Gadījumā, kad n = a, iegūstam a + dn = a(d+1), tātad šis skaitlis dalās ar a un d+1. Ja a>1, tad a(d+1) nav pirmskaitlis. Ja a = 1, tad n vērtībai n = d+2 izpildās $a+dn=1+d(d+2)=d^2+2d+1=(d+1)^2$, kas nav pirmskaitlis.

13. Pēc krāsošanas mēs iegūstam figūru, kas redzama zīmējumā.



Nokrāsotas tiek 2 kolonnas no abiem sāniem, kā arī 2 rindas no augšas un apakšas, tādēļ balto rūtiņu skaits būs $(m-4)(n-4)$, bet sarkano rūtiņu skaits būs $mn-(m-4)(n-4)$ (kopējais rūtiņu skaits mīnus balto rūtiņu skaits). Lai sarkano un balto rūtiņu skaits sakristu, jāizpildās vienādībai:

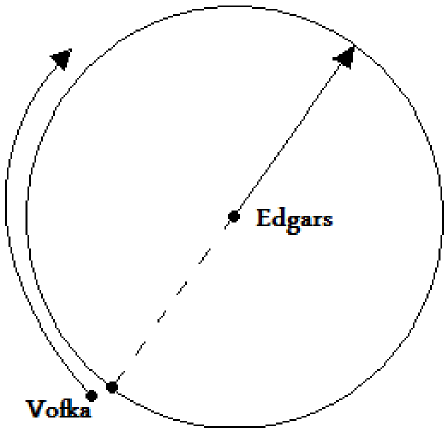
$$(m-4)(n-4)=mn-(m-4)(n-4),$$

kuru var pārveidot sekojoši

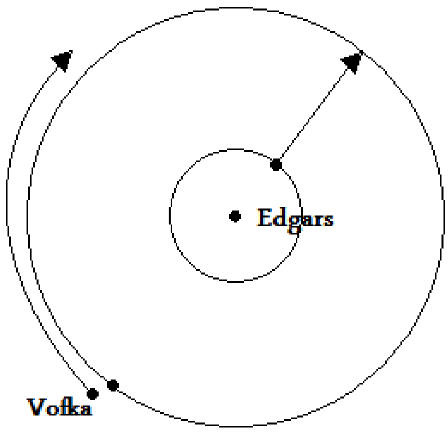
$$2(m-4)(n-4)-mn=0$$
$$mn-8n-8m+32=0$$
$$mn-8n-8m+64=32$$
$$(m-8)(n-8)=32$$

No šejienes ir skaidrs, ka $m-8$ un $n-8$ ir skaitļa 32 dalītāji. Tātad der šādas $m-8$ vērtības 1, 2, 4, 8, 16, 32 un to atbilstošās $n-8$ vērtības ir 32, 16, 8, 4, 2, 1. Tālāk var iegūt arī, ka m der šādas vērtības 9, 10, 12, 16, 24, 40 un atbilstošās n vērtības 40, 24,16, 12, 10, 9. Būtībā ir 3 taisnstūri (vai arī to versijas pagrieztas par 90°), kuriem izpildās uzdevuma nosacījumi – 9 x 40, 10 x 24 un 12 x 16.

14. Pieņemam riņķa rādiusu par 1 vienību. Gadījumā, kad x = 3 Edgars var vienkārši peldēt taisni uz krastu, pretēji Vofkas atrašanās vietai (skat. zīm. 1). Vofkam jānoskrien π, kamēr Edgaram jānopeld 1, kas nozīmē vieglu aizbēgšanu.
Gadījumā, kad x = 4, aizmukt joprojām ir iespējams, taču Edgaram krietni jāpasvīst. Lai to īstenotu, viņam jārīkojas sekojoši:
1) jānopeld 9/40 no centra jebkurā virzienā (kā varēs redzēt no tālākā sprieduma, der jebkurš attālums a, tāds, ka $\frac{(4-\pi)}{4}<a<\frac{1}{4}$;
2) jāpeld pa riņķi, kamēr Vofka atrodas diametrāli pretējā ezera punktā (skat. zīm. 2);
3) jāpeld taisni uz krastu.
Šī pieeja strādā, jo, atrodoties attālumā a, tuvāk par ¼ no centra, Edgara *leņķiskais ātrums* ir lielāks par Vofkas, un līdz ar to viņš var kustēties pa savu riņķi ar rādiusu a ātrāk, nekā Vofka skrien pa lielo riņķi ar rādiusu 1. Tiklīdz viņš būs sasniedzis 2) minēto punktu, viņam atliks nopeldēt 31/40, kamēr Vofkam jānoskrien π, tāpēc Edgars atkal spēs aizbēgt.



Zīm. 1



Zīm. 2

.

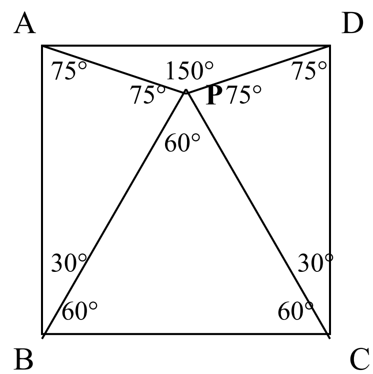
15. Jā, var. Aruna stratēģija ir sekojoša: pirmo plakātu viņš uzlīmē pašā sienas centrā. Kad Ašouks pieliek pie sienas savu plakātu, Arunam jāpielīmē viņa nākamais plakāts *simetriski Ašouka plakātam* attiecībā pret sienas centru. Tas ir vienmēr iespējams, jo ja kāda vieta, simetriski Ašouka plakātam, būtu aizņemta, tad pēc iepriekšējās konstrukcijas arī tai simestriskā vieta, proti, Ašouka plakāta aizņemtā vieta nebūtu brīva, kas neļautu Ašoukam uzlīmēt savu plakātu (jo gan siena, gan plakāti ir centrāli simetriski). Tā kā sienas laukums ir ierobežots, pienāks laiks, kad vietas aptrūksies. Arunam vietas aptrūkties nevar, līdz ar to Ašouks būs tas, kas vienu dienu vairs nevarēs uzlīmēt savu plakātu uz sienas, tāpēc Aruna plakātu būs vairāk. Jāpiezīmē, ka ir svarīgi, ka Aruns pielīmē savu pirmo plakātu centrā, tādējādi neizjaucot simetriju. Šis uzdevums izmanto *invarianta principu*, proti, tiek atrasta kāda vērtība vai īpašība, kas nemainās, lai arī ko darītu pretinieks. Šajā gadījumā invariants ir pozīcijas centrālā simetrija pēc katra Aruna uzlīmētā plakāta.

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

9. klases uzdevumu atrisinājumi

1. $4a^4 + b^4 = (2a^2 + b^2) - 4a^2b^2 = (2a^2 + b^2 - 2ab)(2a^2 + b^2 + 2ab)$

2. ΔBPC ir vienādmalu trijstūris, tādēļ visi tā leņķi ir 60°. $\angle$ABC = 90° (ABCD-kvadrāts), tādēļ $\angle$ABP = 90°-$\angle$PBC = 30°. Pēc dotā BP = BC un, tā kā AB = BC (ABCD-kvadrāts), tad AB = BP, no kurienes $\angle$BPA = $\angle$BAP = $\frac{(180°-30°)}{2}$ = 75°. Analogi spriežot par trijstūri CPD, mēs iegūstam, ka arī $\angle$CPD = 75°. Tātad $\angle$APD = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.



3. Pieņemsim, ka d ir lielākais no skaitļiem un pārējos pēc lieluma var sakārtot šādi $a \le b \le c \le d$. Skaidrs, ka $abcd = a + b + c + d \le 4d$ un $abc \le 4$. Iespējamās a, b, c vērtības, lai izpildītos nevienādībā, attiecīgi ir (1, 1, 4), (1, 2, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 1, 1). Varam aprēķināt arī atbilstošās d vērtības (no $d = \frac{a+b+c}{abc-1}$): 2 (neder tāpēc, ka tad d nav lielākais no skaitļiem), $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$, 4 un pēdējais gadījums nav iespējams. Acīmredzot der tikai vērtībā d = 4, no kurienes arī iegūstam 4 skaitļus, kuriem izpildās dotā vienādība – 1, 1, 2, 4. Jāveic pārbaude.

4. Jā, monetārā specvienībā var dienas laikā atrast brāķa monētas. Ar 3 svēršanas reizēm abas brāķa monētas var atrast pēc sekojoša algoritma:
sveram 3 monētas vienā pusē un 3 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OOO=OOO OOO<OOO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – katrā no 3 monētu grupām ir pa vienai brāķa monētai;
2) viena puse ir vieglāka – vieglākajā pusē ir abas brāķa monētas.

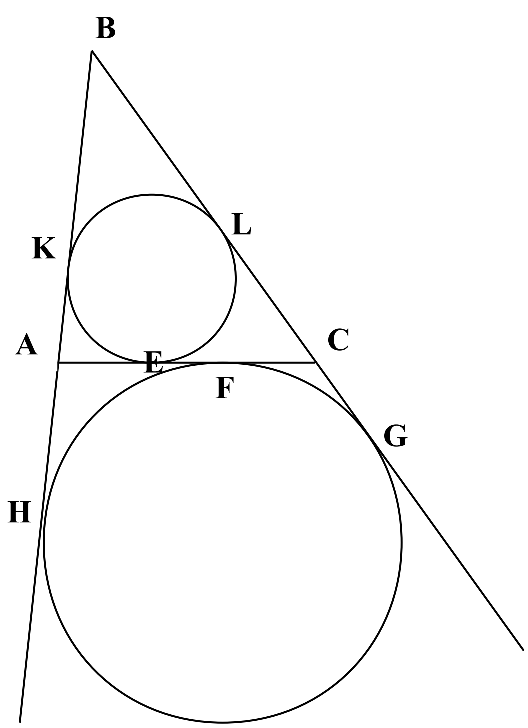
Sākotnēji apskatīsim 1. gadījumu. Izvēlamies vienu no 3 monētu grupām un nosveram jebkuras divas šis grupas monētas.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:

1) abas monētas sver vienādi, tad, tā kā tikai viena no sākotnējam trim monētām bija brāķa, šīs 2 nosvērtās monētas nav brāķa, kas nozīmē, ka atlikusī nenosvērtā monēta ir brāķa;
2) viena no monētām ir vieglāka, tad šī monēta arī ir viena no meklētajām brāķa monētām.
Tagad sveram divas monētas no otras 3 monētu grupas.
3. svēršana (1.gad) O=O O<O
Analoģiski kā ar pirmajām 3 monētām, šeit arī iespējami divi gadījumi un, tādā pašā veidā analizējot šos divus gadījumus, mēs varam secināt, kura no otrajām 3 monētām ir brāķa monētā.

Tagad apskatīsim 2. gadījumu. Izvēlamies vieglāko no 3 monētu grupām, kā zināms, starp izvēlētajam 3 monētām būs 2 brāķa monētas
2. svēršana (2.gad) O=O O<O
Ja tās abas būs līdzsvarā, tad abas būs meklētās brāķa monētas. Savukārt, ja viena no tām būs vieglāka, tad būs viena no brāķa monētām, bet otra būs atlikusī nenosvērtā monēta.

5. Pieņemsim, ka visas trīs vienādības tiešām izpildās. Tad viens no saskaitāmajiem *km* un *ln* būs pāra skaitlis, bet otrs nepāra, citādi to summa nebūs nepāra skaitlis. Mēs varam pieņemt, ka *km* ir nepāra skaitlis, bet *ln* pāra skaitlis. Lai divu skaitļu reizinājums būtu nepāra skaitlis, abiem jābūt nepāra skaitļiem, bet lai reizinājums būtu pāra skaitlis vismaz vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad vismaz viens no skaitļiem *l* un *n* ir pāra skaitlis, bet *k* un *m* abi ir nepāra, kas nozīmē, ka vismaz viena no summām $k + l$ un $m + n$ ir nepāra skaitlis, bet pēc dotā abām summām vajadzēja būt pāra skaitļiem. Tātad sākotnējais pieņēmums nav iespējams.

6. Tā kā pieskaru pret riņķa līniju, kas iziet no viena punkta, garumi ir vienādi, varam apzīmēt BK = BL = a, AK = AE = c, CE = CL = b. Apzīmēsim arī AH = AF = x, CG = CF = y. Tā kā BH = BG, varam rakstīt:



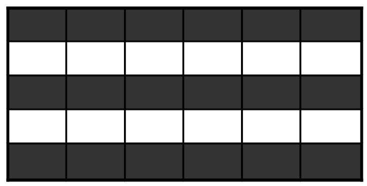
$a+c+x=a+b+y$ jeb
$b-x=y-c$, kā arī
$x+y=AC=c+b$, no kā seko
$c-y=b-x$ un
$b-x=y-c=-(c-y)$, kas nozīmē, ka $c-y=0$, un līdz ar to AE = c = y = FC.

7. Jā, var. Skat. zīm.

2	9	22	15	4	29
21	14	3	10	23	16
8	1	24	17	28	5
13	20	7	26	11	18
	25	12	19	6	27

Ar pelēko luuciņu apzīmēta zirdziņa sākotnējā atrašanās vieta. Ar skaitļiem apzīmētā gājienu secībā, kāda zirdziņš var nostāties uz dotā laukuma visām rūtiņām.

Pieņemsim, ka pie dotā nosacījuma zirdziņš spēs apstaigāt laukumu, katrā rūtiņā nostājoties tieši vienu reizi. Iekrāsosim laukuma katru otro rindiņu melnā krāsā, kā parādīts zīmējumā.



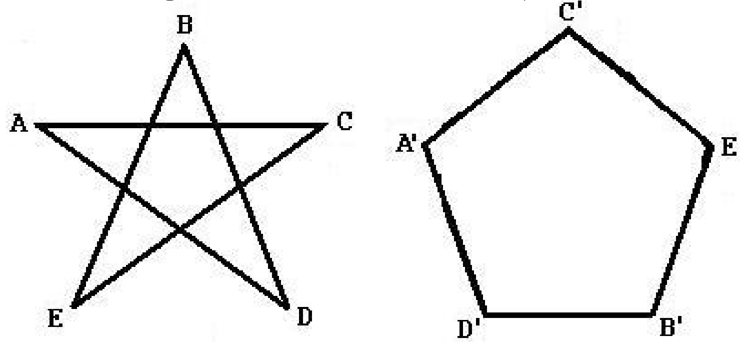
Gājienus, kas sākti ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ apzīmēsim ar V, bet gājienus, kas sākti ar divām rūtiņām pa labi/kreisi ar H. Tā kā, veicot gājienu H zirdziņš, maina rūtiņās krāsu, uz kuras tas stāv, bet, veicot gājienu V, nemaina rūtiņas krāsu, tad skaidrs, ka, veicot gājienu sēriju HV, zirdziņš pa ceļam būs nostājies uz divām vienas krāsas rūtiņām. Savukārt, veicot gājienu sēriju HVHV, zirdziņš pa ceļam būs nostājies uz 2 baltajām un 2 melnajām rūtiņām. Zinot, ka zirdziņš no sākotnējās rūtiņas veiks 29 gājienus (pamīšus H un V), var secināt, ka zirdziņš veiks 7 HVHV gājienu sērijas, tātad pa ceļam būs nostājies uz 14 baltajām rūtiņām. Uz dotā laukuma ir palikušas neiekrāsotas tikai 12 baltās rūtiņas, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir pretrunīgs un zirdziņš nespēs apstaigāt laukumu, katrā rūtiņā nostājoties tieši vienu reizi.

8. Šī uzdevuma galvenā ideja ir, ka jebkuram naturāla skaitļa kvadrātam dalītāju skaits ir nepāra. Tiešām, pieņemsim $n = x^2$. Ja d ir n dalītājs, tad arī $\frac{n}{d}$ ir n dalītājs. Tas nozīmē, ka mēs varam sadalīt visus dažādos n dalītājus pāros, izņemot d = x, jo tad $d = x = \frac{d}{n}$.
Tātad n dalītāju skaits ir nepāra skaitlis. $(2009\,!)^{2008} = ((2009\,!)^{1004})^2$ tāpēc tā dalītāju skaits ir nepāra.

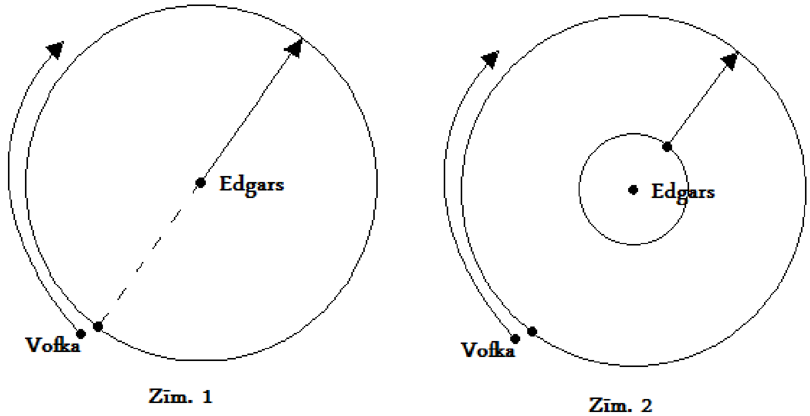
9. Iedomāsimies, ka starp katriem diviem Orbitrekiem, kuri ir viens otram ir paspieduši roku, ir novilkta virve. Tie Orbitreki, kas būs spieduši roku nepāra skaitu reižu, turēs rokā nepāra skaitu virves galu, bet tie Orbitreki, kas būs spieduši roku pāra skaitu reižu, pāra skaitu. Skaidrs, ka tie Orbitreki, kas ir izdarījuši pāra skaitu rokas spiedienu, visi kopā turēs pāra skaitu virves galu. Tā kā kopējais virvju galu skaits, ko tur rokā Orbitreki ir pāra skaitlis (to ir divreiz vairāk nekā kopējais virvju skaits), tad arī atlikušajiem Orbitrekiem, kas izdarījuši nepāra skaitu rokas spiedienu, visiem kopā jātur ir pāra skaits virves galu. Tas savukārt iespējams, tikai tad, ja šādu Orbitreku ir pāra skaitlis (ja to būtu nepāra skaitlis, tad, nepāra skaitļus skaitot nepāra skaitu reižu, summa, būs nepāra skaitlis).

10. Tiešām var atrast tādas n vērtības, ka a + dn nav pirmskaitlis. Gadījumā, kad n = a, iegūstam a + dn = a(d+1), tātad šis skaitlis dalās ar a un d+1. Ja a>1, tad a(d+1) nav pirmskaitlis. Ja a = 1, tad n vērtībai n = d+2 izpildās $a+dn=1+d(d+2)=d^2+2d+1=(d+1)^2$, kas nav pirmskaitlis.

11. „Atlokot" piecstaru zvaigzni ABCDE, iegūstam regulāru piecstūri A'B'C'D'E'. Žetonu pārvietošanu starp zvaigznes virsotnēm var identificēt ar pārvietošanu pa piecstūra malām (piem. A→C atbilst A'→C'). Sākotnēji žetoni 1,2,3 atrodas virsotnēs A,B,C. Tātad, ejot pret pulksteņrādītāja virzienu ap piecstūri, sākot ar žetonu 1, vispirms sekos žetons 2, tad 3. Tā kā ar atļautajiem gājieniem nav iespējams šo secību izjaukt, nav iespējams panākt, ka virsotnēs A,B,C žetoni ir secībā 3,2,1 (jo tad piecstūrī, ejot pret pulksteņa rādītāja virzienu no žetona 1, vispirms sekotu žetons 3, tad 2).



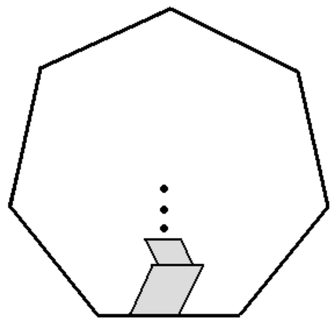
12. Pieņemam riņķa rādiusu par 1 vienību. Gadījumā, kad x = 3 Edgars var vienkārši peldēt taisni uz krastu, pretēji Vofkas atrašanās vietai (skat. zīm. 1). Vofkam jānoskrien π, kamēr Edgaram jānopeld 1, kas nozīmē vieglu aizbēgšanu.
Gadījumā, kad x = 4, aizmukt joprojām ir iespējams, taču Edgaram krietni jāpasvīst. Lai to īstenotu, viņam jārīkojas sekojoši:
1) jānopeld 9/40 no centra jebkurā virzienā (kā varēs redzēt no tālākā sprieduma, der jebkurš attālums a, tāds, ka $\frac{(4-\pi)}{4}<a<\frac{1}{4}$;
2) jāpeld pa riņķi, kamēr Vofka atrodas diametrāli pretējā ezera punktā (skat. zīm. 2);
3) jāpeld taisni uz krastu.
Šī pieeja strādā, jo, atrodoties attālumā a, tuvāk par ¼ no centra, Edgara *leņķiskais ātrums* ir lielāks par Vofkas, un līdz ar to viņš var kustēties pa savu riņķi ar rādiusu a ātrāk, nekā Vofka skrien pa lielo riņķi ar rādiusu 1. Tiklīdz viņš būs sasniedzis 2) minēto punktu, viņam atliks nopeldēt 31/40, kamēr Vofkam jānoskrien π, tāpēc Edgars atkal spēs aizbēgt.



Zīm. 1

Zīm. 2

13. Nē, nav. Tagad pieņemsim pretējo – tāds sadalījums eksistē. Tādā gadījumā kādam no paralelogramiem tā vienai malai ir daļēji jāsakrīt ar kādu no 7-stūra malām, kurai nav paralēla neviena cita mala (ja šādu malu nebūtu iespējams atrast, tad būtu trīs malas, kas ir savstarpēji paralēlas, bet izliektam 7-stūrim, tas nav iespējams). Kāda cita paralelograma malai savukārt daļēji jāsakrīt ar iepriekšējā paralelograma pretējo malu utt. (zīm 3.), izveidojot paralēlu nogriežņu virkni. Tā kā paralelogramu ir galīgs skaits, kādai no citām 7-stūra malām ir daļēji jāsakrīt ar pēdējo nogriezni šajā virknē, bet tas nav iespējams, jo tas ir pretrunā ar nosacījumu, ka sākotnējā šīs virknes mala nav paralēla ne ar vienu citu 7-stūra malu.



Zīm. 3

14. Abās minētajās izlozes procedūrās visi skolēni ir pilnīgi vienlīdzīgi; tādējādi var teikt, ka procedūras ir simetriskas pret visiem skolēniem. Tas nepierāda, ka abas procedūras ir vienādas! Taču pierāda, ka ikviens patiess apgalvojums (saistīts ar izlozi) par Renāru būs spēkā arī par jebkuru citu skolēnu. Tādējādi skolēnu izredzes kļūt par kapteini, izmantojot pirmo pieeju, ir vienādas, 1/35. Līdzīgi arī Renāra ierosinātajā procedūrā.
Secinājums: Simetrijas argumenti, lietoti uzmanīgi, ir vērtīgi uzdevumu risināšanā.

Tiem, kas pazīstami ar kombinatorikas elementiem, ir noderīgi arī apskatīt alternatīvu risinājumu.

No n elementiem k elementus var izvēlēties $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ veidos.

Apskatīsim pirmo izlozes veidu. No 35 skolēniem 11 var izvēlēties C_n^{11} veidos, visi vienlīdz iespējami (tātad varbūtība $\frac{1}{C_{35}^{11}}$ katram sastāvam). No šiem tieši C_{34}^{10} sastāvos ir Renārs (jo ir jāizvēlas 10 citi cilvēki no 34 pārējiem). Gadījumā, ja Renārs tiek komandā, tad viņa izredzes kļūt par kapteini ir 1/11. Tātad kopumā Renāra izredzes kļūt par kapteini šajā gadījumā ir $\frac{1}{11}(C_{34}^{10} / C_{35}^{11}) = \frac{1}{11} \cdot \frac{(35-1)!}{10!(35-11)!} \cdot \frac{11!(35-11)!}{35!} = \frac{1}{35}$ (pārējie reizinātāji saucējā un skaitītājā noīsinās). Tātad varbūtība ir tāda pati, kā Renāra ierosinātajā gadījumā, kad uzreiz no 35 skolēniem tiek izvēlēts 1 kapteinis.

15. Jā, var. Aruna stratēģija ir sekojoša: pirmo plakātu viņš uzlīmē pašā sienas centrā. Kad Ašouks pieliek pie sienas savu plakātu, Arunam jāpielīmē viņa nākamais plakāts *simetriski Ašouka plakātam* attiecībā pret sienas centru. Tas ir vienmēr iespējams, jo ja kāda vieta, simetriski Ašouka plakātam, būtu aizņemta, tad pēc iepriekšējās konstrukcijas arī tai simestriskā vieta, proti, Ašouka plakāta aizņemtā vieta nebūtu brīva, kas neļautu Ašoukam uzlīmēt savu plakātu (jo gan siena, gan plakāti ir centrāli simetriski). Tā kā sienas laukums ir ierobežots, pienāks laiks, kad vietas aptrūksies. Arunam vietas aptrūkties nevar, līdz ar to Ašouks būs tas, kas vienu dienu vairs nevarēs uzlīmēt savu

plakātu uz sienas, tāpēc Aruna plakātu būs vairāk.
Jāpiezīmē, ka ir svarīgi, ka Aruns pielīmē savu pirmo plakātu centrā, tādējādi neizjaucot simetriju. Šis uzdevums izmanto *invarianta principu*, proti, tiek atrasta kāda vērtība vai īpašība, kas nemainās, lai arī ko darītu pretinieks. Šajā gadījumā invariants ir pozīcijas centrālā simetrija pēc katra Aruna uzlīmētā plakāta.