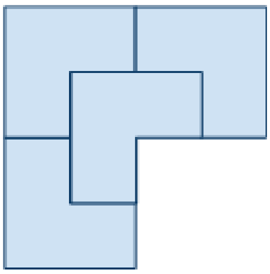
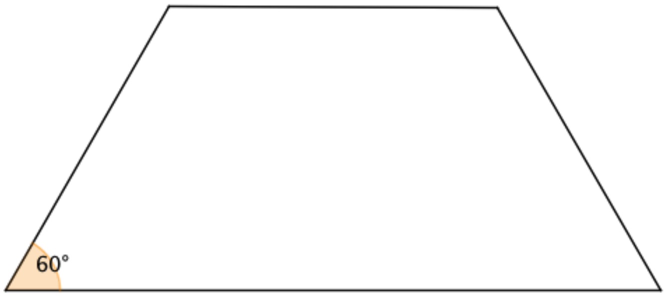
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 10. klasei

1. Figūra zīmējumā ir sadalīta 4 daļās, kas ir līdzīgas lielajai figūrai. Sadali doto trapeci (tās sānu malas vienādas ar īsāko pamatu), izmantojot četras tai līdzīgas, savā starpā vienādas trapeces.

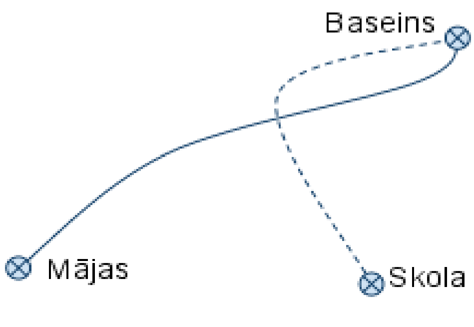




2. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

3. Atrisināt nevienādību: $\dfrac{(x^2+6x+5)(x+2)(x^2-5x+4)}{x^2(x-4)(6-x-x^2)(x^2-2x-15)(x-2)(3-x)} \geq 0$

4. Mindaugs no mājām uz baseinu iet pa ceļu, kas kartē uzzīmēts ar nepārtrauktu līniju, bet no skolas uz baseinu - pa ceļu, kurš iezīmēts ar raustītu līniju. Turklāt viņš apgalvo, ka katrs no ceļiem ir īsākais iespējamais. Kādā gadījumā viņam var būt taisnība?



5. Reāliem a, b, c pierādīt $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

6. Reksis pie 1m x 1m kvadrātveida suņubūdas piesiets ar 1.5 m garu ķēdi. Cik lielu laukumu Reksis var apsargāt, ja ķēde ir piestiprināta suņubūdas malas vidū?

7. Bruņurupucis sacentās ar Zaķi 10km skrējienā. Bruņurupucis skrēja ar ātrumu 1km/h, bet Zaķis - 20km/h. Lai kaitinātu Bruņurupuci, Zaķis nolēma tieši pirms finiša griezties apkārt un skriet līdz Bruņurupucim; tad atkal skriet uz finišu. Tā viņš atkārtoja daudzas reizes, līdz Bruņurupucis sasniedza finišu. Cik lielu attālumu noskrēja Zaķis?

8. Pierādīt, ka eksistē divas tādas dažādas skaitļa 7 pakāpes, ka to starpība dalās ar 2010.

9. Doti veseli skaitļi a un b un zināms, ka $2a+3b$ un $4a+5b$ dalās ar 7. Pierādi, ka gan a, gan b dalās ar 7.

10. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 = 8z + 5$ nav atrisināms veselos skaitļos.

11. Uz 10 x 10 laukuma katra lauciņa ir uzlikta spuldzīte. Sākotnēji ieslēgta ir tikai viena spuldzīte stūra lauciņā. Ar katru gājienu ir atļauts izvēlēties jebkuru laukuma kolonnu vai rindiņu un nomainīt visu tajā esošu spuldzīšu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu, no izslēgta uz ieslēgtu). Vai, vairākkārt izdarot gājienus, var panākt, ka ieslēgtā stāvoklī ir tieši puse no visām spuldzītēm?

12. Līna iedomājās vienu no 52 kārtīm normālā komplektā. Renārs mēģinās uzminēt, kuru kārti Līna iedomājusies, uzdodot tikai jautājumus, uz kuriem var atbildēt ar "jā" vai "nē". Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuriem Renārs noteikti var uzzināt pareizo kārti?

13. Kurš skaitlis ir lielāks: 99^{2010} vai 2010^{1345} ?

14. Uz tāfeles uzrakstīti visi pāra skaitļi no 2 līdz 2^{2010}. Fredis nodzēš jebkurus 2 skaitļus a un b un uzraksta to vietā $\frac{ab}{4}$. Tā viņš turpina, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis, apzīmēsim to ar k. Pierādīt:

a) k ir naturāls;
b) k+1 ir savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

15. Martai sestdienu pēcpusdienas ir ģimenes dienas - viņa brauc pie kādas no savām omēm. Viena ome dzīvo Purvciemā, bet otra - Zolitūdē. Marta brauc no tieši divu autobusu maršrutu galapunkta. Viens no maršrutiem ved uz Zolitūdi, bet otrs - uz Purvciemu, turklāt katrā maršrutā autobusi kursē ļoti regulāri - ar 10 minūšu intervālu. Marta abas omes ļoti mīl, tāpēc vienmēr ir grūti izvēlēties - pie kuras braukt. Tāpēc Marta nolēma šo izvēli atstāt nejaušībai - viņa nejaušā laikā sestdienas pēcpusdienā aiziet uz pieturu un kāpj pirmajā autobusā, kas tajā pietur. Tomēr 2009. gadā viņai tikai 6 sestdienas sanāca ciemoties pie Zolitūdes omes, bet 46 sestdienas - pie Purvciema omes. Kāds tam varētu būt iemesls?