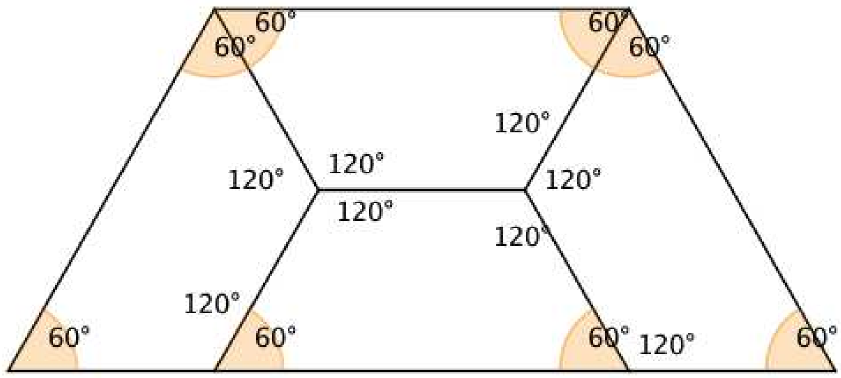
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

---

10. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Trapece tiek dalīta 4 trapecēs, kurām sānu malas vienādas ar īsāko pamatu un šaurais leņķis ir 60°, kā arī tās visas ir vienādas savā starpā.



2. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.
Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OO=OO OO<OO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;
b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.
Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.
2. svēršana (2.gad) OO=OO OO<OO
1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.
2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

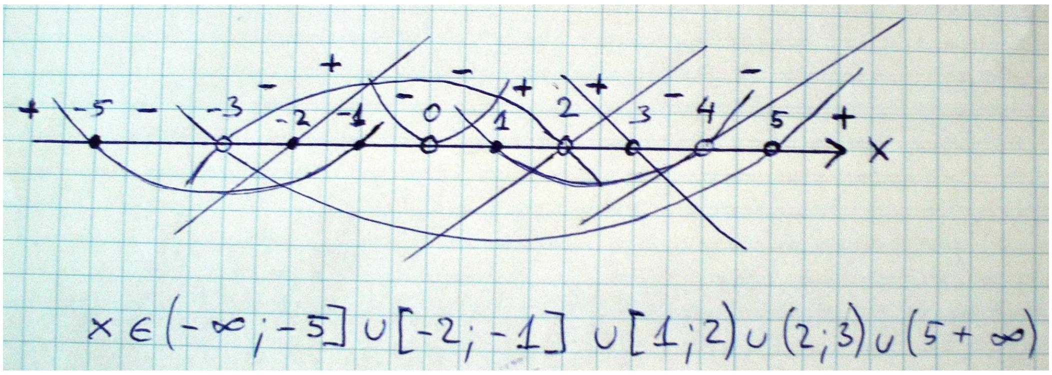
Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.
1. un 2. svēršana O=O O=O O=O O<O
Ir iespējami divi gadījumi:

1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.
2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svariem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svariem.

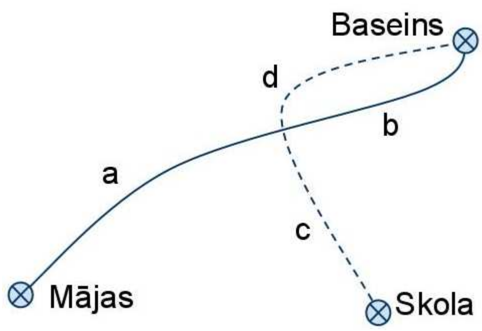
3. Atrodot kvadrātvienādojumu saknes, mēs varam tos sadalīt reizinātājos un attiecīgi pārrakstīt sākotnējo nevienādību:

$$\frac{[(x+5)(x+1)](x+2)[(x-4)(x-1)]}{x^2(x-4)[(x+3)(2-x)]\,[(x-5)(x+3)](x-2)(3-x)} \geq 0$$

Un tad attiecīgi, aplūkojot intervālus, kuros nevienādības kreisā puse ir pozitīva vai negatīva, mēs atradīsim nevienādības atrisinājumu:



4. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar *a,b,c,d*. Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu *b* vai *d*. No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a+b \leq a+d$ un $c+d \leq c+b$. Tātad $b \leq d$ un $d \leq b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



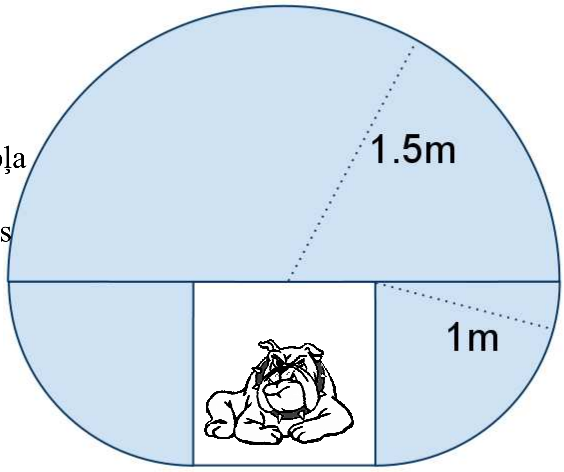
5. Pareizināsim abas nevienādības puses ar 2:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Tālāk mēs varam veikt sekojošos pārveidojumus:

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

Tā kā jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad arī iegūtā nevienādība būs spēkā visiem reāliem *a,b,c*.



6. Reksis var apsargāt teritoriju būdas priekšā, kas ir pusapļa formā ar rādiusu 1.5m, kā arī teritorijas būdas sānos, kas ir ceturtdaļapļa formā ar rādiusu 1m (jo ķēde apliecas ap būdas stūri). Tātad izmantojot formulu $L = \pi r^2$, iegūstam

$Laukums = \frac{1}{2}\pi 1.5^2 + \frac{2}{4}\pi 1^2 = \frac{13}{8}\pi$

Atbilde: Reksis var apsargāt $\frac{13}{8}\pi$ m^2 lielu laukumu.

7. Bruņurupucis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupucis skrējienu sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupuci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupucis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.

8. Vienkāršības labad var apskatīt skaitļa 7 pakāpes no 0. līdz 2010. pakāpei, tātad kopā 2011 skaitļus. Skaitli dalot ar 2010, tas var dot atlikumus no 0 līdz 2009, t.i., kopā 2010 dažādus atlikumus. Tādēļ pēc Dirihlē principa iegūstam, ka starp mūsu izvēlētajām 2011 skaitļa 7 pakāpēm, vismaz divas dos vienādus atlikumus, dalot ar 2010. Attiecīgi šo divu skaitļa 7 pakāpju starpība dalīsies ar 2010.

9. Skaidrs, ka $2(2a+3b)$ dalās ar 7, tādēļ arī

$$2(2a+3b)-(4a+5b) \text{ dalās ar 7}$$
$$(4a-4a+6b-5b) \text{ dalās ar 7}$$
$$b \text{ dalās ar 7}$$

Tā kā viens no $2a+3b$ saskaitāmajiem, t.i., 3b dalās ar 7, tad, lai $2a+3b$ dalītos ar 7, arī otram saskaitāmajam $2a$ jādalās ar 7. Tā kā skaitļiem 2 un 7 nav kopīgu dalītāju, tad a dalās ar 7.

10. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

$x \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts *x mod 8* apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā $x^2 \bmod 8$ ir atkarīgs tikai no *x mod 8*, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2 \bmod 8$ var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y, ka $(x^2+2y^2) \bmod 8$ ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.

Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc *mod 8*, nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

11. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindiņā ir ieslēgtas *i* spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindiņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par *i*, bet tajā pašā laikā palielināsim par 10 - *i*, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par – *i* + (10 - *i*) = 10

– $2i$, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldzīšu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldzīšu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

12. Noteikti var uzminēt ar 6 jautājumiem:

1) Vai sarkana kārts?
2) Jā: Vai ercens? Nē: Vai pīķis?

Esam noskaidrojuši mastu, atliek ar 4 jautājumiem noskaidrot kārts stiprumu. Sanumurēsim stiprumus ar skaitļiem 1-13.

<table>
<tr><td>3)</td><td colspan="13">1-8?</td></tr>
<tr><td>4)</td><td colspan="8">Jā: 1-4?</td><td colspan="5">Nē: 9-11?</td></tr>
<tr><td>5)</td><td colspan="4">Jā: 1-2?</td><td colspan="4">Nē: 5-6?</td><td colspan="3">Jā: 9?</td><td colspan="2">Nē: 12?</td></tr>
<tr><td>6)</td><td colspan="2">Jā: 1?</td><td colspan="2">Nē: 3?</td><td colspan="2">Jā: 5?</td><td colspan="2">Nē: 7?</td><td rowspan="2">9</td><td colspan="2">Nē: 10?</td><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td></tr>
</table>

Ar pieciem vai mazāk jautājumiem nav iespējams droši uzminēt iedomāto kārti: Iedomājamies līdzīgu tabulu augstāk dotajai. Pēc katras atbildes saņemšanas, mūsu tālākai rīcībai ir divi varianti (kas atbilst atbildēm „Jā" un „Nē"). Tas nozīmē, ka pēc 5 atbilžu saņemšanas ir 32 iespējamie rīcības varianti (katrs no kuriem ir konkrētas kārts nosaukšana, jo ir beigušies jautājumi). Līna varēja iedomāties jebkuru no 52 kārtīm, taču ar pieciem jautājumiem nav iespējams iegūt 52 dažādus iznākumus.

13. Skaidrs, ka $99^{2010} < 100^{2010}$ un $2010^{1345} > 1000^{1345}$
Tātad, ja $100^{2010} < 1000^{1345}$, tad arī $99^{2010} < 2010^{1345}$

$100^{2010} = 10^{4020}$
$1000^{1345} = 10^{4035}$
$10^{4020} < 10^{4035}$
$100^{2010} < 1000^{1345}$
$99^{2010} < 2010^{1345}$
K.b.j.

14. Apskatīsim visu uz tāfele uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Sākotnēji tas būs $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2^{2010}$. Ar katru gājienu, tas tiks samazināts 4 reizes. Tad, tā kā ar katru veikto gājienu uz tāfeles esošo skaitļu skaits samazinās par viens un sākumā bija 2^{2009} skaitļu, tikai veikti $2^{2009} - 1$ gājieni. Tādēļ skaidrs, ka k = $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2^{2010}}{4^{2^{2009}-1}}$. Apskatīsim, cik daudz ir skaitļu 2 starp reizinājuma $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2^{2010}$ pirmreizinātājiem. Tā kā visi skaitļi ir pāra, tad būs vismaz 2^{2009} divnieku. Tā kā tie ir viens otram sekojoši pāra skaitļi, tad katrs otrais skaitlis dalīsies ar 4, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$ divnieku, attiecīgi katrs ceturtais skaitlis dalīsies ar 8, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{4} = 2^{2007}$ divnieku ... katrs 2^{2009}-tais skaitlis dalīsies ar 2^{2009}, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2^{2009}} = 1$ divnieks. Tādēļ reizinājumu $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2^{2010}$ mēs var izteikt kā $2^{2^{2009}+2^{2008}+2^{2007}+...+1} \cdot M$, kur M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju reizinājums. Zinot ģeometriskās progresijas summu, šajā reizinājumā mēs divnieka pakāpi var pārrakstīt: $2^{\frac{2^{2010}-1}{2-1}} \cdot M$ jeb $2^{2^{2010}-1} \cdot M$.

Tātad k = $\dfrac{2^{2^{2010}-1} \cdot M}{4^{2^{2009}-1}} = \dfrac{2^{2^{2010}-1} \cdot M}{2^{2^{2010}-2}} = 2M$. Skaidrs, ka k ir naturāls pāra skaitlis.

Attiecīgi k + 1 = 2M + 1. Tā kā tas būs nepāra skaitlis, tam nebūs neviena pāra pirmreizinātāja. Turklāt, zinot, ka M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju reizinājums, skaitli k + 1, dalot ar jebkura sākotnējā skaitļa jebkuru nepāra pirmreizinātāju, atlikums būs 1. Tātad k + 1 nedalīsies ne ar vienu no sākotnējo skaitļu pirmreizinātājiem, t.i., būs savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

15. Ļoti ticams skaidrojums varētu būt tas, ka Zolitūdes autobuss izbrauc minūti pēc Purvciema autobusa. Apskatīsim 10 minūšu intervālus starp katriem diviem Purvciema autobusiem. Ja Marta ierodas pieturā pirmajās 9 no šīm 10 minūtēm, tad pirmais pienāks Zolitūdes autobuss. Tikai tad, ja Marta pieturā ierodas starp 9. un 10. minūti, pirmais autobuss būs Purvciema autobuss. Līdz ar to, tikai aptuveni 10% gadījumu Marta aizbrauks uz Purvciemu.