Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

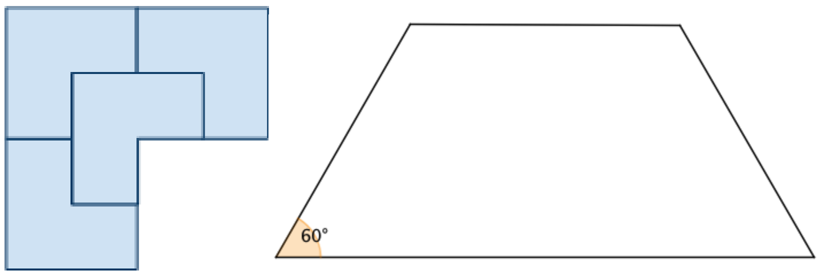
Uzdevumi 11. klasei

1. Hokeja čempionātā piedalās 27 komandas. Tās ir sadalītas 3 vienādi lielās konferencēs. Čempionāta nolikumā ir noteikts, ka katrai komandai ar savas konferences komandām ir jāizspēlē 16 spēles, bet ar pārējo konferenču komandām kopā jāizspēlē 9 spēles. Pierādiet, ka nolikums ir kļūdains, un hokeja komandām vajadzētu boikotēt šo čempionātu!

2. Edgars uz metamā kauliņa 6 skaldnēm uzrakstīja skaitļus 14, 6, 2, 18, 22, 10. Zane uz sava metamā kauliņa drīkst uzrakstīt skaitļus, kas ir par 1, 2 vai 3 mazāki vai lielāki kā jebkurš no Edgara uzrakstītajiem skaitļiem. Edgars Zanei apsolīja, ja, metot abus kauliņus, uzmesto skaitļu summa uz tiem būs 24, viņš viņai uzdāvinās ceļojumu uz Havaju salām. Vai Zane skaitļus uz sava kauliņa var uzrakstīt tā, lai viņai būtu iespēja tikt pie ceļojuma?

3. Kārbā ir 2010 konfektes. Katru minūti kāds no tās vai nu izņem trīs konfektes, vai pieliek 6 konfektes. Pierādi, ka nepienāks tāds brīdis, kad kārbā ir tieši 1010 konfektes.

4. Figūra zīmējumā ir sadalīta 4 daļās, kas ir līdzīgas lielajai figūrai. Sadali doto trapeci (tās sānu malas vienādas ar īsāko pamatu), izmantojot četras tai līdzīgas, savā starpā vienādas trapeces.



5. Katru sestdienu 18 no 23 Orbitrekiem ir jāierodas uz apaļā galda sanāksmi. Tā kā Orbitreki ir karstasinīgi, tad, blakus apsēžoties 4 Orbitrekiem, noteikti sāksies ķīviņš. Pierādiet, ka nav pagājusi ne sestdiena bez savstarpēja Orbitreku ķīviņa, ja zināms, ka pie galda ir 23 sēdvietas!

6. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

7. Reāliem pozitīviem a,b,c pierādīt $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

8. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 = 8z + 5$ nav atrisināms veselos skaitļos.

9. Kurš skaitlis ir lielāks: 99^{2010} vai 2010^{1345}?

10. Jānis un Līga nopirka taisnstūra formas šokolādi, kas sastāv no 6x8 vienādiem šokolādes kubiciņiem. Jānis izdomāja spēli. Katrs spēlētājs (viens pēc otra) drīkst sadalīt šokolādi, laužot to pa taisnu līniju un tikai pa līniju, kas atdala šokolādes kubiciņus vienu no otra. Tā, piemēram, Jānis savā gājienā var sadalīt šokolādi divos gabalos – 2x6 un 6x6 izmērā. Līga savā gājienā tagad var, piemēram, 6x6 gabalu sadalīt 1x6 un 5x6 gabalos, vai, piemēram, sadalīt 2x6 gabalu 1x2 un 5x2 gabalos. Spēlētājs, kas var izdarīt pēdējo gājienu, uzvar un drīkst apēst visu šokolādi. Spēli sāk Jānis.

a) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi pareizi spēlējot?

b) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi, ja sākotnējais šokolādes izmērs ir m x n gabaliņi?

11. Izteikt summu 1 + 11 + 111 + ... + $\underbrace{111\ldots111}_{\text{n reizes}}$ kā funkciju no n.

12. Uz tāfeles uzrakstīti visi pāra skaitļi no 2 līdz 2^{2010}. Fredis nodzēš jebkurus 2 skaitļus a un b un uzraksta to vietā $\frac{ab}{4}$. Tā viņš turpina, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis, apzīmēsim to ar k. Pierādīt:

a) k ir naturāls;

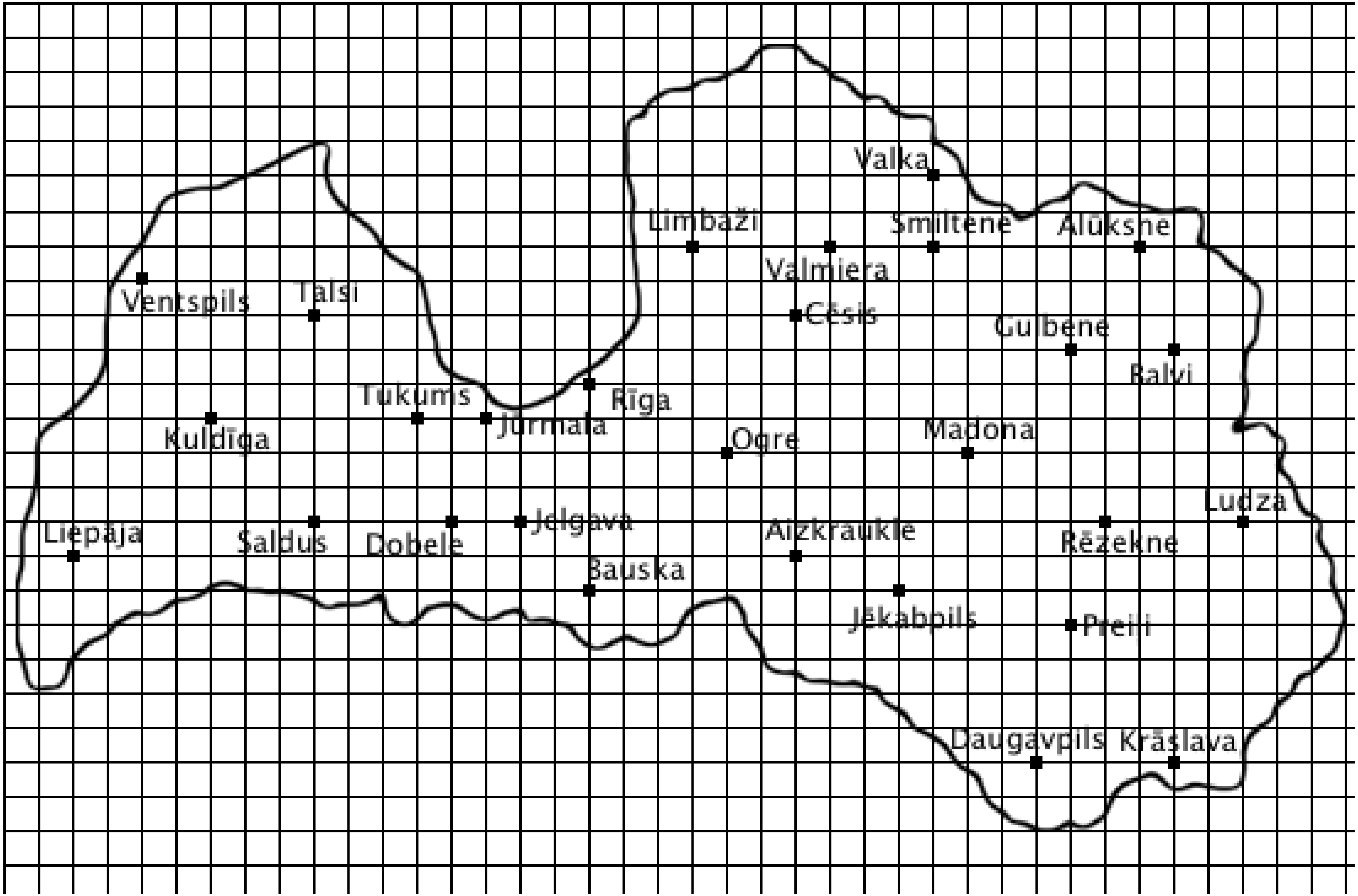
b) k+1 ir savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

13. Izsakiet a kā funkciju no x: $x^2 + a\sqrt{4x+1} - a^2 = 0$

Atrisināt reālos skaitļos: $x^2 + 3\sqrt{4x+1} - 9 = 0$

14. Martai sestdienu pēcpusdienas ir ģimenes dienas - viņa brauc pie kādas no savām omēm. Viena ome dzīvo Purvciemā, bet otra - Zolitūdē. Marta brauc no tieši divu autobusu maršrutu galapunkta. Viens no maršrutiem ved uz Zolitūdi, bet otrs - uz Purvciemu, turklāt katrā maršrutā autobusi kursē ļoti regulāri - ar 10 minūšu intervālu. Marta abas omes ļoti mīl, tāpēc vienmēr ir grūti izvēlēties - pie kuras braukt. Tāpēc Marta nolēma šo izvēli atstāt nejaušībai - viņa nejaušā laikā sestdienas pēcpusdienā aiziet uz pieturu un kāpj pirmajā autobusā, kas tajā pietur. Tomēr 2009. gadā viņai tikai 6 sestdienas sanāca ciemoties pie Zolitūdes omes, bet 46 sestdienas - pie Purvciema omes. Kāds tam varētu būt iemesls?

15. iDžejs, garlaicības mākts, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt parelēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs - Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?


Valka
Limbaži
Smiltene
Alūksne
Valmiera
Ventspils
Talsi
Cēsis
Gulbene
Balvi
Tukums
Rīga
Jūrmala
Kuldīga
Ogre
Madona
Ludza
Liepāja
Saldus
Dobele
Jelgava
Aizkraukle
Rēzekne
Bauska
Jēkabpils
Preiļi
Daugavpils
Krāslava