Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

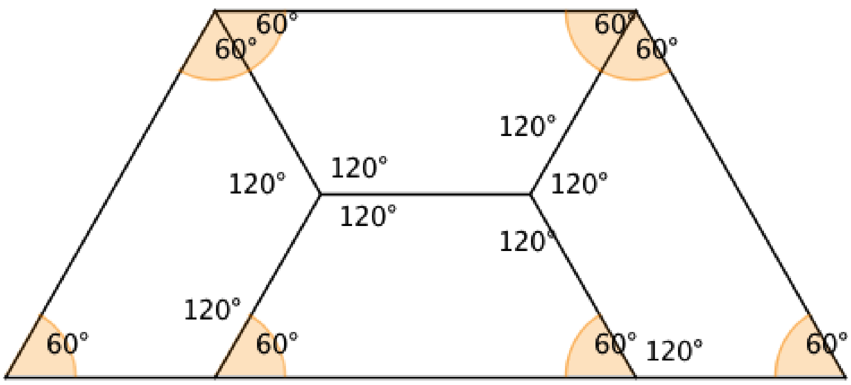
11. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.

2. Ievērosim, ka skaitļi uz Edgara metamā kauliņa dod atlikumu 2, dalot ar 4, t.i., mēs tos varam uzrakstīt formā 4k+2 (kur k – naturāls skaitlis). Uz Zanes kauliņa tad būs uzrakstīt skaitļi (4k+2)±1, 2, 3 un attiecīgi, metot abus kauliņus, skaitļu summa uz tiem būs (8k+4) ±1, 2, 3 jeb 4(2k+2) ±1, 2, 3. Acīmredzams, ka skaitļu summa nedalīsies ar 4, tātad tā nekad nebūs 24, jo tas dalās ar 4.

3. Invariantu metode. Sākotnējais skaitlis 2010 dalās ar 3. Arī skaits, par kuru katru minūti mainās konfekšu skaits, dalās ar 3. Tātad visi konfekšu skaiti, ko var iegūt, dalīsies ar 3. 1010 nedalās ar 3. Tātad konfekšu skaits kārbā nekad nevar būt 1010.

4. Trapece tiek dalīta 4 trapecēs, kurām sānu malas vienādas ar īsāko pamatu un šaurais leņķis ir 60°, kā arī tās visas ir vienādas savā starpā.



5. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvieta un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\leq \frac{23 \cdot 3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17 Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

6. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.
Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OO=OO OO<OO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;
b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.
Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.
2. svēršana (2.gad) OO=OO OO<OO
1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.
2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.
1. un 2. svēršana O=O O=O O=O O<O
Ir iespējami divi gadījumi:
1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.
2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svariem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svariem.

7. Mēs varam veikt šādas 3 substitūcijas:

$$a + b = x$$
$$b + c = y$$
$$a + c = z$$

Attiecīgi mēs varam pārrakstīt doto nevienādību par $\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{y+z-x}{2x}\geq\frac{3}{2}$,

kuru varam turpināt pārveidot:

$$\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}\geq 3$$

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1\geq 3$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 6$$

Šī nevienādība būs spēkā, jo jebkuriem pozitīviem *m* un *n* izpildās nevienādība $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geq 2$,

kura savukārt būs patiesa, jo $\frac{m^2+n^2}{mn}\geq 2$

(pareizinot abas puses ar *mn*, vienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli)

$$m^2-2mn+n^2\geq 0$$

$$(m-n)^2\geq 0,$$

un jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

8. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

x mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2 *mod 8*	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts *x mod 8* apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā x^2 *mod 8* ir atkarīgs tikai no *x mod 8*, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2$ *mod 8* var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y, ka (x^2+2y^2) *mod 8* ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.

Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc *mod 8*, nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

9. Skaidrs, ka $99^{2010} < 100^{2010}$ un $2010^{1345} > 1000^{1345}$

Tātad, ja $100^{2010} < 1000^{1345}$, tad arī $99^{2010} < 2010^{1345}$

$100^{2010} = 10^{4020}$

$1000^{1345} = 10^{4035}$

$10^{4020} < 10^{4035}$

$100^{2010} < 1000^{1345}$

$99^{2010} < 2010^{1345}$

K.b.j.

10. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru m x n . Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta m·n gabaliņos ar izmēru 1 x 1. Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas (m·n - 1) laušanas. Ja m·n ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja m·n ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6 x 8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

11. Jebkuru k skaitli $\underbrace{111...111}_{k}$ mēs varam izteikt, kā $1+10^1+10^2+\ldots+10^k$, kas ir ģeometriskā progresija ar progresijas koeficientu 10. Tādēļ pēc ģeometriskā progresijas locekļu summas formulas $\underbrace{111...111}_{k} = \dfrac{(10^{k+1}-1)}{(10-1)}$. Sākotnējo summu mēs varam pārrakstīt kā

$$\frac{(10^1-1)}{(10-1)}+\frac{(10^2-1)}{(10-1)}+...+\frac{(10^{n+1}-1)}{(10-1)}$$

$$\frac{(10\cdot(10^0+10^1+...+10^n)-n)}{9},$$

Un, vēlreiz pielietojot ģeometriskās progresijas locekļu summas formulu, mēs iegūtam meklēto funkciju $f(n)=\dfrac{(10\cdot(10^n-1)-n)}{9}$.

12. Apskatīsim visu uz tāfele uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Sākotnēji tas būs $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2^{2010}$. Ar katru gājienu, tas tiks samazināts 4 reizes. Tad, tā kā ar katru veikto gājienu uz tāfeles esošo skaitļu skaits samazinās par viens un sākumā bija 2^{2009} skaitļu, tikai veikti $2^{2009}-1$ gājieni. Tādēļ skaidrs, ka k = $\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2^{2010}}{4^{2^{2009}-1}}$. Apskatīsim, cik daudz ir skaitļu 2 starp reizinājuma $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2^{2010}$ pirmreizinātājiem. Tā kā visi skaitļi ir pāra, tad būs vismaz 2^{2009} divnieku. Tā kā tie ir viens otram sekojoši pāra skaitļi, tad katrs otrais skaitlis dalīsies ar 4, tātad būs vēl papildu $\dfrac{2^{2009}}{2}=2^{2008}$ divnieku, attiecīgi katrs ceturtais skaitlis dalīsies ar 8, tātad būs vēl papildu $\dfrac{2^{2009}}{4}=2^{2007}$ divnieku ... katrs 2^{2009}-tais skaitlis dalīsies ar 2^{2009}, tātad būs vēl papildu $\dfrac{2^{2009}}{2^{2009}}=1$ divnieks. Tādēļ reizinājumu $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2^{2010}$ mēs var izteikt kā $2^{2^{2009}+2^{2008}+2^{2007}+...+1}\cdot M$, kur M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju reizinājums. Zinot ģeometriskās progresijas summu, šajā reizinājumā mēs divnieka pakāpi var pārrakstīt: $2^{\frac{2^{2010}-1}{2-1}}\cdot M$ jeb $2^{2^{2010}-1}\cdot M$.

13. Doto vienādību mēs varam apskatīt kā kvadrātvienādojumu, kuram mainīgais ir *a*:

$$a^2-\sqrt{4x+1}\cdot a-x^2=0$$

Varam aprēķināt diskriminantu D $=\left(-\sqrt{4x+1}\right)^2+4x^2=4x+1+4x^2=(2x+1)^2$. No šejienes var izteikt *a* kā funkciju no x: $a=f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}\pm|2x+1|}{2}=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\pm\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$.

Lai reālos skaitļus atrisinātu vienādojumu $x^2+3\sqrt{4x+1}-9=0$, mēs var izmantot iepriekš iegūto funkciju un, ievietojot *a* = 3, iegūsim šādu vienādojumu:

$$3=\sqrt{x+\frac{1}{4}}\pm\left|x+\frac{1}{2}\right|$$

Tā kā mums tāpat jāapskata abi + un - gadījumi, varam atmest moduli:

$$3=\sqrt{x+\frac{1}{4}}\pm\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Vispirms apskatīsim gadījumu $-\left(x+\frac{1}{2}\right)$:

$$x+\frac{7}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

Ja $x\geq-\frac{7}{2}$ un $x\geq-\frac{1}{4}$, tad varam kāpināt abas puses kvadrātā un iegūstam

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=x+\frac{1}{4}$$

$$x^2+6x+12=0$$

Acīmredzami, ka diskriminats būs negatīvs D = 36 – 48 = -12, tātad atrisinājums šajā gadījumā neeksistē.

Tagad apskatīsim gadījumu $+\left(x+\frac{1}{2}\right)$:

$$-x+\frac{5}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

Ja $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{5}{2}$, tad varam kāpināt abas puses kvadrātā

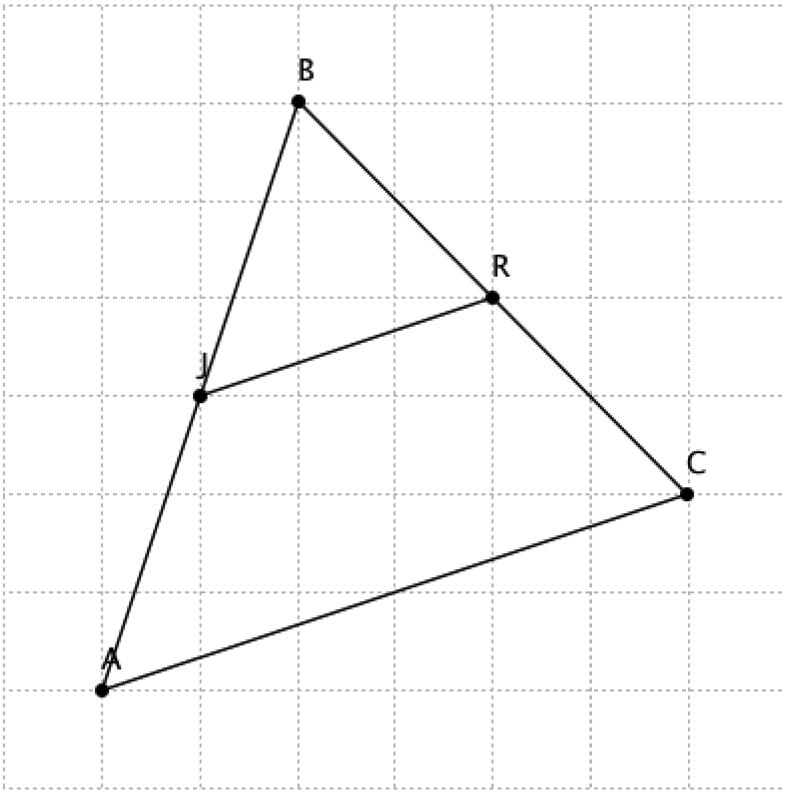
$$x^2-6x+6=0$$

D= 36 -24 = 12

Tad kvadrātvienādojumu saknes būs x = $\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}$ = $3\pm\sqrt{3}$. Sakne $3+\sqrt{3}>3$ nederēs, jo citādi neizpildās nosacījums $x\leq\frac{5}{2}$ (savukārt $3-\sqrt{3}$ < 2). Tātad vienādojuma vienīgais atrasinājums ir $3-\sqrt{3}$.

14. Ļoti ticams skaidrojums varētu būt tas, ka Zolitūdes autobuss izbrauc minūti pēc Purvciema autobusa. Apskatīsim 10 minūšu intervālus starp katriem diviem Purvciema autobusiem. Ja Marta ierodas pieturā pirmajās 9 no šīm 10 minūtēm, tad pirmais pienāks Zolitūdes autobuss. Tikai tad, ja Marta pieturā ierodas starp 9. un 10. minūti, pirmais autobuss būs Purvciema autobuss. Līdz ar to, tikai aptuveni 10% gadījumu Marta aizbrauks uz Purvciemu.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).
a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. AJ = JB, BR = RC, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad AC || JR un AC = 2JR. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6; y - 2).



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:
I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,
II. A atrodas otrpus R no J,
III. A atrodas otrpus J no R

i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā AC = 2JR, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6;y - 2).

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y), bet otras - (x + 6, y + 2), atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.