7. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Pieņemsim, ka pamatcena ir x latu. Tad normālā cena ir $x+\frac{21}{100}x=\frac{121}{100}x$. Piešķirot 21% atlaidi, mēs iegūstam akcijas cenu, kas ir 100%-21%=79% no normālās cenas, t.i. $\frac{79}{100}+\frac{121}{100}x=\frac{9559}{10000}x<x$. Tātad akcijas cena ir mazāka par pamatcenu. No šī arī redzams, ka pamatcena ir $\frac{100}{121}$ no normālās cenas. Tādēļ pareizā atlaide būtu bijusi $\frac{21}{121}$ jeb, izsakot apaļos procentos, 17%.

2. Ja liftā brauc 9 pieaugušie, tad aizņemtas ir $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ lifta. Tātad brīva vēl $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ lifta. Tātad liftā vēl ir vieta ne vairāk kā $\frac{1}{4}$ no 20 = 5 bērniem.

3. No pirmdienas līdz sestdienai Anna izlasa $6\cdot 4=24$ lapaspuses. Tātad vienā nedēļā Anna izlasa 24 + 25 = 49 lapaspuses. Skaidrs, ka Anna grāmatu lasīs 6 pilnas nedēļas (jo 335 : 49 = 6 atl. 41), un pāri paliks 41 lapaspuse, ko lasīt. Tā kā Anna sāka lasīt svētdienā, tad pēc 6 pilnām nedēļām viņā lasīšanu arī turpinās svētdienā, kad izlasīs 25 lapaspuses. Atlikušās 16 lapaspuses Anna izlasīs 4 dienās. Tātad kopā Anna grāmatu izlasīs $6\cdot 7+1+4=47$ dienās.

4. I. $a\cdot b>0$
$a\cdot c<0$
a un b ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi. Ja a (un tātad - arī b) ir pozitīvs, tad c ir negatīvs, ja a (un b) ir negatīvs, tad c ir pozitīvs. Skaidrs, ka viens no skaitļiem b un c ir pozitīvs, bet otrs - negatīvs, tātad reizinājums - negatīvs.
II. Ja reizinājums ir pozitīvs, resp., negatīvs, tad neviens no skaitļiem nav nulle. Apskatām reizinājumu $(a\cdot b)\cdot(a\cdot c)<0$. Iegūstam $a^2b\cdot c<0$. Tā kā $a^2>0$, tad $b\cdot c<0$.

5. Tā kā 120º + 80º > 180º, tad 120º leņķis un 80º leņķis būs katrs savā trijstūrī, attiecīgi platleņķa trijstūrī un šaurleņķa trijstūrī. Ņemot vērā, ka 80º + 10º = 90º, t.i., trešais leņķis šo divu leņķu veidotajā trijstūrī būs taisns, tad 10º leņķis būs vienā trijstūrī ar 120º leņķi. Platleņķa trijstūrī ir zināmi divi leņķi, tādējādi mēs varam izrēķināt arī trešo leņķi: 180º - 120º - 10º = 50º. Tātad 55º grādu leņķis būs šaurleņķu trijstūrī, kuram trešais leņķis būs 180º - 80º - 55º = 45º grādus liels.

6. Invariantu metode. Abu kociņu garumi dalās ar 4, tātad arī jebkura to kombinācija dalīsies ar 4. Tā kā 70 nedalās ar 4, tad šādu garumu nomērīt nav iespējams.

7. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.
Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OO=OO OO<OO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;
b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.
Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.
2. svēršana (2.gad) OO=OO OO<OO
1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.
2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.
1. un 2. svēršana O=O O=O O=O O<O
Ir iespējami divi gadījumi:
1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.
2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svariem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svariem.

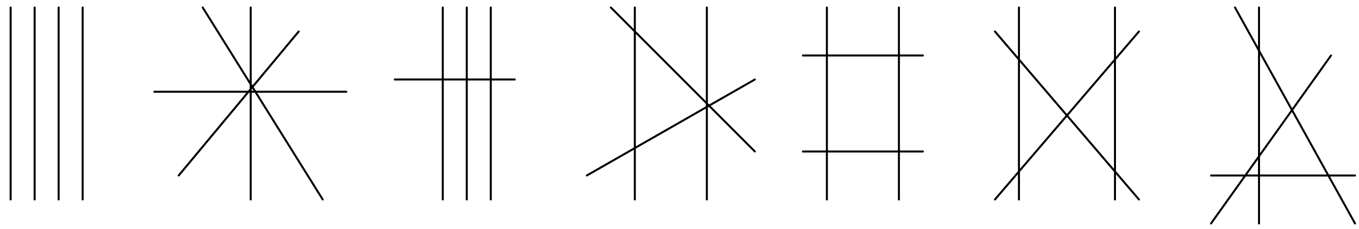
8. Ja pirmais saka patiesību, tad otrais un trešais ir meļi. Tā kā trešais apgalvo, ka viņam priekšā stāv melis, viņš saka patiesību - pretruna. Tātad pirmais ir melis. Otrā apgalvojums ir patiess, tātad tas ir patiesais; trešā- nepatiess, tātad trešais ir melis utt. Tā kā rindā kopā ir 21 cilvēks un pirmais, trešais, piektais, ..., divdesmitpirmais ir meļi, tad kopā ir 11 meļu.

9. Bruņurupucis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupucis skrējienu sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupuci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupucis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.

10. A - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1. A ir nākamais skaitlis aiz mazākā naturālā skaitļa, kas dalās ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9. Šādam skaitlim ir jādalās ar 5, 7, 8, 9 (tad tas dalīsies arī ar 2, 3, 4, 6). $5\cdot7\cdot8\cdot9 = 2520$. Var ievērot arī, ka (A-1) = MKD[1] (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ = 2520. Tātad A = 2520 + 1 = 2521

[1]MKD – mazākais kopīgais dalāmais.

11. Iespējamo plaknes daļu skaitu un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Skaidrs, ka daļu skaits, kādā mēs sadalīsim plakni, būs atkarīgs no tā, cik krustpunktus veidos dotās 4 taisnes. Tāpēc apskatīsim iespējamo krustpunktu skaitu. Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties $4\cdot3/2=6$ veidos.
To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



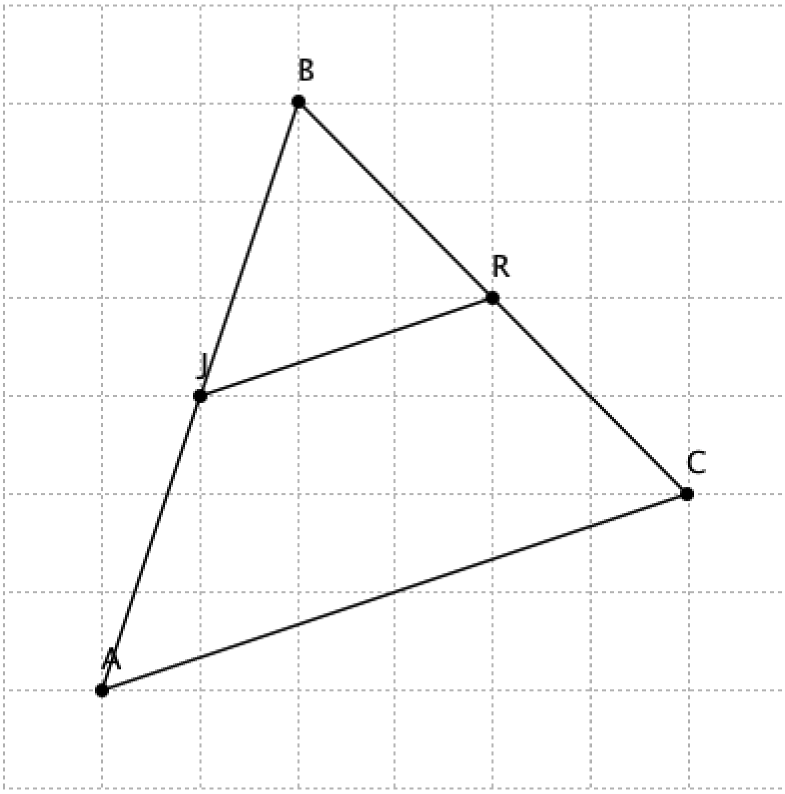
0 krustp.	1 krustp.	3 krustp.	3 krustp.	4 krustp.	5 krustp.	6 krustp.
5 daļas	**8 daļas**	8 daļas	**9 daļas**	9 daļas	**10 daļas**	**11daļas**

12. Pieņemsim, ka bija *k* „vīrietis-sieviete" rokasspiedienu. Tad attiecīgi bija 105 - *k* sievietes, kas sarokojās savās starpā, un 95 – *k* vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par (105 – *k*) – (95 – *k*) = 10 vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete" rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis" rokasspiedienu.

13. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvieta un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\le \frac{23\cdot3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17 Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

14. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindiņā ir ieslēgtas *i* spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindiņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par *i*, bet tajā pašā laikā palielināsim par 10 - i, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par $-i + (10 - i) = 10 - 2i$, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldzīšu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldzīšu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).
a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. AJ = JB, BR = RC, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad AC || JR un AC = 2JR. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6; y - 2).



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:
I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,
II. A atrodas otrpus R no J,
III. A atrodas otrpus J no R
 i. ne lielākā attālumā kā JR,
 i. lielākā attālumā kā JR.
Arī šajā gadījumā AC = 2JR, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6;y - 2).

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y), bet otras - (x + 6, y + 2), atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.