8. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Pieņemsim, ka pamatcena ir x latu. Tad normālā cena ir $x+\frac{21}{100}x=\frac{121}{100}x$. Piešķirot 21% atlaidi, mēs iegūstam akcijas cenu, kas ir 100%-21%=79% no normālās cenas, t.i. $\frac{79}{100}+\frac{121}{100}x=\frac{9559}{10000}x<x$. Tātad akcijas cena ir mazāka par pamatcenu. No šī arī redzams, ka pamatcena ir $\frac{100}{121}$ no normālās cenas. Tādēļ pareizā atlaide būtu bijusi $\frac{21}{121}$ jeb, izsakot apaļos procentos, 17%.

2. Skaidrs, ka kvadrāta pēdējais cipars būs atkarīgs tikai no sākotnējā skaitļa pēdējā cipara. Tātad mums jāapskata tikai 10 gadījumi:

Sākotnējā skaitļa pēdējais cipars	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
Tā kvadrāta pēdējais cipars	**...0**	**...1**	**...4**	**...9**	**...6**	**...5**	...6	...9	...4	...1

Ir seši varianti, kāds var būt kvadrāta pēdējais cipars – 0, 1, 4, 5, 6, 9.

3. Ievērosim, ka skaitļi uz Edgara metamā kauliņa dod atlikumu 2, dalot ar 4, t.i., mēs tos varam uzrakstīt formā 4k+2 (kur k – naturāls skaitlis). Uz Zanes kauliņa tad būs uzrakstīt skaitļi (4k+2)±1, 2, 3 un attiecīgi, metot abus kauliņus, skaitļu summa uz tiem būs (8k+4) ±1, 2, 3 jeb 4(2k+2) ±1, 2, 3. Acīmredzams, ka skaitļu summa nedalīsies ar 4, tātad tā nekad nebūs 24, jo tas dalās ar 4.

4. Skaidrs, ka $2(2a+3b)$ dalās ar 7, tādēļ arī

$$2(2a+3b)-(4a+5b) \text{ dalās ar } 7$$

$$(4a-4a+6b-5b) \text{ dalās ar } 7$$

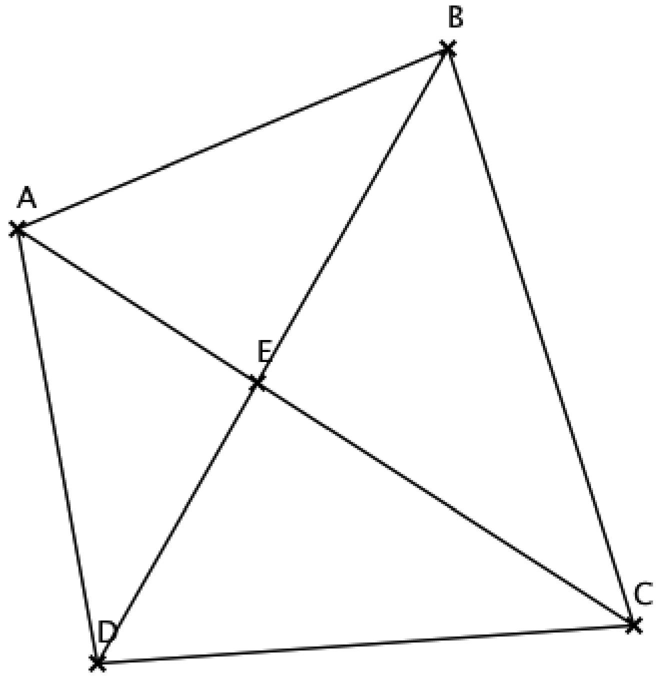
$$b \text{ dalās ar } 7$$

Tā kā viens no $2a+3b$ saskaitāmajiem, t.i., 3b dalās ar 7, tad, lai $2a+3b$ dalītos ar 7, arī otram saskaitāmajam $2a$ jādalās ar 7. Tā kā skaitļiem 2 un 7 nav kopīgu dalītāju, tad a dalās ar 7.

5. Pēc trijstūru nevienādības:

$AE + EB > AB$
$DE + EC > CD$

$AE + EB + DE + EC > AB + CD$
$AE + EC + BE + ED > AB + CD$
$AC + BD > AB + CD$



6. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.
Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.
1. svēršana OO=OO OO<OO
Ir iespējami divi gadījumi:
1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.
2. svēršana (1.gad) O=O O<O
Atkal ir iespējami divi iznākumi:
a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;
b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.
Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.
2. svēršana (2.gad) OO=OO OO<OO

1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.
2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

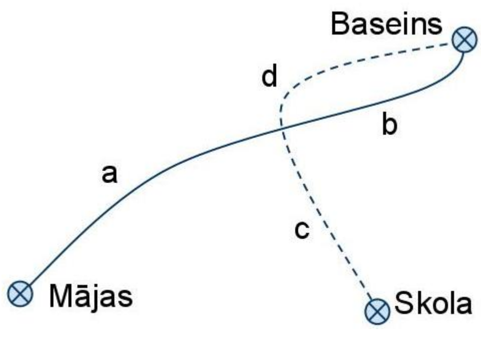
Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.
1. un 2. svēršana O=O O=O O=O O<O
Ir iespējami divi gadījumi:
1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.
2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svariem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svariem.

7. Ja skaitlis, dalot ar 5, dod atlikumu 4, tad to mēs varam uzrakstīt formā $5a + 4$ jeb $5a - 1$ (t.i., pieskaitot 1 tas dos atlikumā 0, dalot ar 5), kur a ir naturāls skaitlis. Analogi skaitli, kurš, dalot ar 3, dod atlikumā 2, mēs varam uzrakstīt kā $3b + 2$. Pēc uzdevumu nosacījumiem jāizpildās šādai vienādībai:

$$5a - 1 = 3b + 2$$
$$5a = 3(b + 1)$$

Tā kā labā puse dalās ar 3, bet kreisajā pusē 5 nav kopīgu dalītāju ar 3, tad, lai vienādībā izpildītos a jādalās ar 3. Tātad mūsu meklēto skaitli var uzrakstīt šādā formā $15c - 1$. Viegli pārliecināties, ka pirmais šāds skaitlis ir 14. Skaidrs, ka katrs piecpadsmitais skaitlis, sākot no 14, atbildīs mūsu prasībām. Starp skaitļiem no 1 līdz 100 ir seši šādi skaitļi: 14, 29, 44, 59, 74, 89. No 1 līdz 1000 būs ne vairāk kā $\frac{1000+1}{15} = 66\frac{11}{15}$ šādu skaitļu (jo $15N - 1 = 1000$, kur N meklējamo skaitļu skaits), t.i., būs 66 skaitļi.

8. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar a,b,c,d. Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu b vai d. No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a + b \le a + d$ un $c + d \le c + b$. Tātad $b \le d$ un $d \le b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



9. Reizinām nevienādības puses ar xy (nevienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli).

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tātad nevienādība spēkā visiem pozitīviem x un y.

10. Pieņemsim, ka bija k „vīrietis-sieviete" rokasspiedienu. Tad attiecīgi bija 105 - k sievietes, kas sarokojās savās starpā, un 95 – k vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par (105 – k) – (95 – k) = 10 vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete" rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis" rokasspiedienu.

11. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvieta un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\leq \frac{23 \cdot 3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17 Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

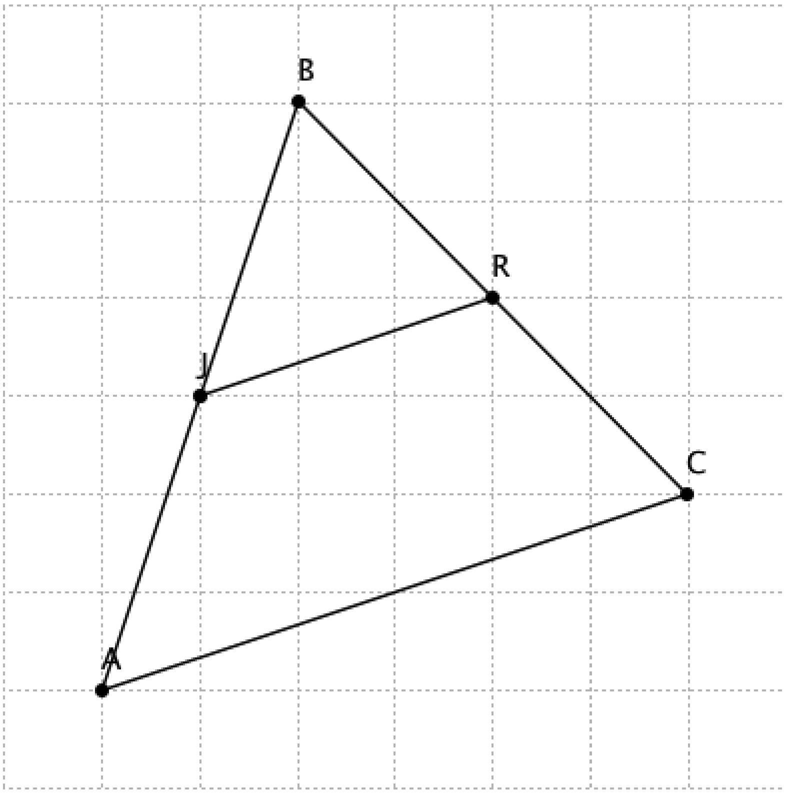
12. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.

13. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindiņā ir ieslēgtas i spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindiņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par i, bet tajā pašā laikā palielināsim par 10 - i, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par – i + (10 - i) = 10 – 2i, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldzīšu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldzīšu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

14. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru m x n . Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta m·n gabaliņos ar izmēru 1 x 1. Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas (m·n - 1) laušanas. Ja m·n ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja m·n ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6 x 8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).

a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. AJ = JB, BR = RC, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad AC || JR un AC = 2JR. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6; y - 2).



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:

I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,

II. A atrodas otrpus R no J,

III. A atrodas otrpus J no R

i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā AC = 2JR, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6;y - 2).

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y), bet otras - (x + 6, y + 2), atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.