Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

9. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Vienkāršības labad var apskatīt skaitļa 7 pakāpes no 0. līdz 2010. pakāpei, tātad kopā 2011 skaitļus. Skaitli dalot ar 2010, tas var dot atlikumus no 0 līdz 2009, t.i., kopā 2010 dažādus atlikumus. Tādēļ pēc Dirihlē principa iegūstam, ka starp mūsu izvēlētajām 2011 skaitļa 7 pakāpēm, vismaz divas dos vienādus atlikumus, dalot ar 2010. Attiecīgi šo divu skaitļa 7 pakāpju starpība dalīsies ar 2010.

2. Bruņurupucis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupucis skrējienu sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupuci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupucis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.

3. A - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1. A ir nākamais skaitlis aiz mazākā naturālā skaitļa, kas dalās ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9. Šādam skaitlim ir jādalās ar 5, 7, 8, 9 (tad tas dalīsies arī ar 2, 3, 4, 6). $5\cdot7\cdot8\cdot9 = 2520$. Var ievērot arī, ka (A-1) = MKD[1] (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ = 2520. Tātad A = 2520 + 1 = 2521

[1]MKD – mazākais kopīgais dalāmais.

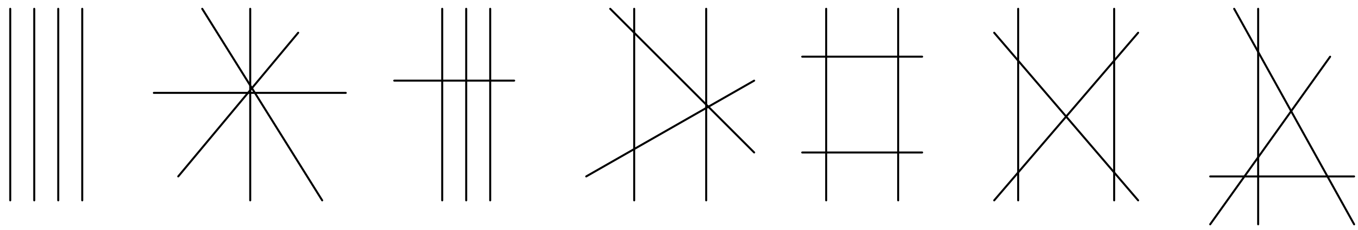
4. Reizinām nevienādības puses ar xy (nevienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli).

$$x^2+y^2\geq 2xy$$
$$x^2+y^2-2xy\geq 0$$
$$(x-y)^2\geq 0$$

Reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tātad nevienādība spēkā visiem pozitīviem x un y.

5. Ja pirmais saka patiesību, tad otrais un trešais ir meļi. Tā kā trešais apgalvo, ka viņam priekšā stāv melis, viņš saka patiesību - pretruna. Tātad pirmais ir melis. Otrā apgalvojums ir patiess, tātad tas ir patiesais; trešā- nepatiess, tātad trešais ir melis utt. Tā kā rindā kopā ir 21 cilvēks un pirmais, trešais, piektais, ..., divdesmitpirmais ir meļi, tad kopā ir 11 meļu.

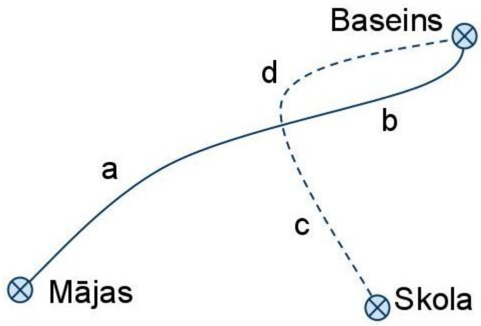
6. Iespējamo plaknes daļu skaitu un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās).



0 krustp.	1 krustp.	3 krustp.	3 krustp.	4 krustp.	5 krustp.	6 krustp.
5 daļas	**8 daļas**	8 daļas	**9 daļas**	9 daļas	**10 daļas**	**11daļas**

Skaidrs, ka daļu skaits, kādā mēs sadalīsim plakni, būs atkarīgs no tā, cik krustpunktus veidos dotās 4 taisnes. Tāpēc apskatīsim iespējamo krustpunktu skaitu. Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties 4·3/2=6 veidos.To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taišņu paralelitāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taišņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).

7. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar *a,b,c,d*. Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu *b* vai *d*. No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a+b \le a+d$ un $c+d \le c+b$. Tātad $b \le d$ un $d \le b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



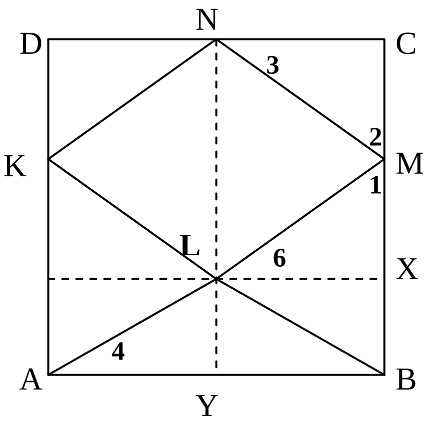
8. Pieņemsim, ka bija *k* „vīrietis-sieviete" rokasspiedienu.
Tad attiecīgi bija 105 - *k* sievietes, kas sarokojās savās starpā, un 95 – *k* vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par (105 – *k*) – (95 – *k*) = 10 vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete" rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis" rokasspiedienu.

9. Invariantu metode. Sākotnējais skaitlis 2010 dalās ar 3. Arī skaits, par kuru katru minūti mainās konfekšu skaits, dalās ar 3. Tātad visi konfekšu skaiti, ko var iegūt, dalīsies ar 3. 1010 nedalās ar 3. Tātad konfekšu skaits kārbā nekad nevar būt 1010.

10. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.

11. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru m x n . Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta m·n gabaliņos ar izmēru 1 x 1. Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas (m·n - 1) laušanas. Ja m·n ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja m·n ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6 x 8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

12. Ievērosim, ka bumbiņas veiktais ceļš ir simetrisks attiecībā pret simetrijas asi uz taisnes NY, jo, sitot bumbiņu no stūra simetriski pretēja punktu B uz A, tā būtu jāsit tādā pašā leņķi, kā no A uz B. (Īsāks risinājums, izmantojot trijstūru līdzību, ir atrodams atrisinājumā beigās.*)



Tādējādi NY dala kvadrātu divās simetriski vienādās daļās un AY = YB = 1m, NY $\parallel$ CB, kā arī $\angle$AYN= $\angle$YBX (kā kāpšļleņķi). Tā kā sitiena leņķis ir vienāds ar bumbiņas atsitiena leņķi, tad $\angle$1= $\angle$2.

Savukārt $\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle YBX=\angle C=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 3=\angle 4$ un

$\left.\begin{array}{l}\angle 3=\angle 4\\ \angle AYN=\angle YBX=\angle C=90^\circ\\ AY=1m=NC\end{array}\right\} \Rightarrow$ ΔAYL = ΔNCM (lml). Caur L novilksim taisni, kas paralēla AB, tad $\angle$4= $\angle$6 (kā kāpšļleņķi) un $\angle$X = $\angle$YBX=90º (arī kā kāpšļleņķi). Tādējādi, zinot, ka NY $\parallel$ CB, var secināt, ka LX = YB =1m (kā attālumi starp paralēlām taisnēm). Iegūstam

$\left.\begin{array}{l}\angle 4+\angle 6\\ \angle AYN=\angle X=90^\circ\\ AY=1\text{m}=LX\end{array}\right\} \Rightarrow$ ΔAYL = ΔLXM , kā arī ΔAYL = ΔLXM = ΔNCM $\Rightarrow$ LY = MX = CM = $\frac{1}{3}CB$ (jo skaidrs, ka LY + XM + CM = CB) = $\frac{2}{3}$ m un AY = LX = NC = 1m. Tādēļ AL = LM = MN = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ m $\Rightarrow$ ceļš AMN = (AL + LM + MN) = $\sqrt{13}$ m. No simetrijas izriet, ka ceļš AMN vienāds ar NKY, no kā iegūstam, ka bumbiņas veiktais attālumus ir $2\sqrt{13}$ m.

*Tiem, kuri zina, kas ir līdzīgi trijstūri, piedavājam arī alternatīvu risinājumu.

$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle ABC=\angle C=90^\circ\\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\} \Rightarrow$ ΔAMB ~ ΔNMC (3 leņķi) $\Rightarrow \frac{AM}{NM}=\frac{NC}{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$AM=2\cdot NM=2\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$ m. Tātad ceļš AMN=AM + NM = $\sqrt{13}$ m. Un līdzīgi kā pirmajā gadījumā, atsaucoties uz simetriju, varam secināt, ka kopējais bumbiņas veiktais attālums bija $2\sqrt{13}$ m.

13. Noteikti var uzminēt ar 6 jautājumiem:

1) Vai sarkana kārts?
2) Jā: Vai ercens? Nē: Vai pīķis?

Esam noskaidrojuši mastu, atliek ar 4 jautājumiem noskaidrot kārts stiprumu. Sanumurēsim stiprumus ar skaitļiem 1-13.

<table>
<tr><td>3)</td><td colspan="13">1-8?</td></tr>
<tr><td>4)</td><td colspan="8">Jā: 1-4?</td><td colspan="5">Nē: 9-11?</td></tr>
<tr><td>5)</td><td colspan="4">Jā: 1-2?</td><td colspan="4">Nē: 5-6?</td><td colspan="3">Jā: 9?</td><td colspan="2">Nē: 12?</td></tr>
<tr><td>6)</td><td colspan="2">Jā: 1?</td><td colspan="2">Nē: 3?</td><td colspan="2">Jā: 5?</td><td colspan="2">Nē: 7?</td><td rowspan="2">9</td><td colspan="2">Nē: 10?</td><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td></tr>
</table>

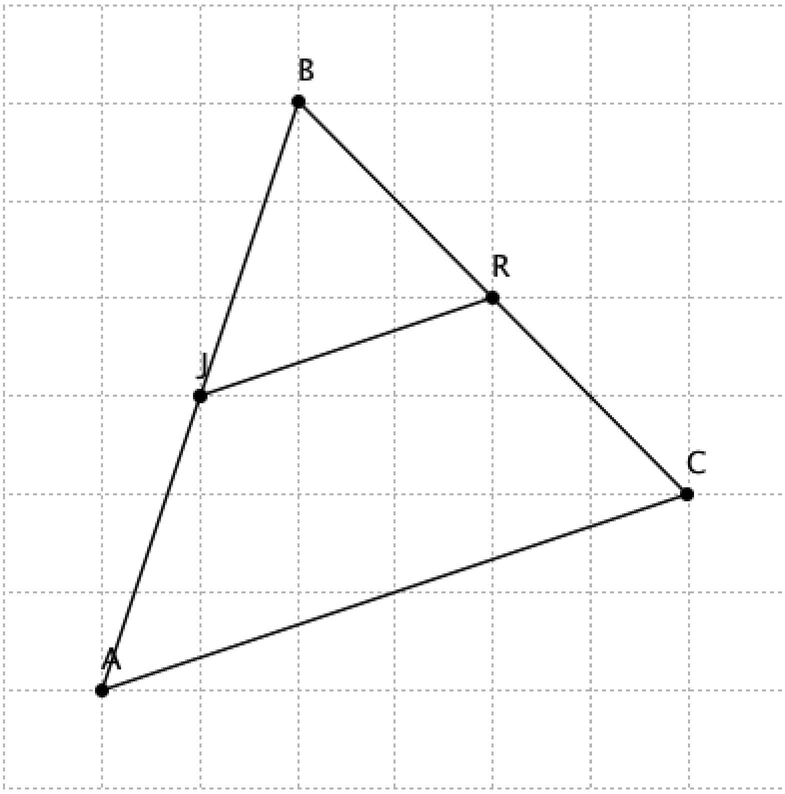
Ar pieciem vai mazāk jautājumiem nav iespējams droši uzminēt iedomāto kārti: Iedomājamies līdzīgu tabulu augstāk dotajai. Pēc katras atbildes saņemšanas, mūsu tālākai rīcībai ir divi varianti (kas atbilst atbildēm „Jā" un „Nē"). Tas nozīmē, ka pēc 5 atbilžu saņemšanas ir 32 iespējamie rīcības varianti (katrs no kuriem ir konkrētas kārts nosaukšana, jo ir beigušies jautājumi). Līna varēja iedomāties jebkuru no 52 kārtīm, taču ar pieciem jautājumiem nav iespējams iegūt 52 dažādus iznākumus.

14. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

$x \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts *x mod 8* apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā $x^2 \bmod 8$ ir atkarīgs tikai no *x mod 8*, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2 \bmod 8$ var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y, ka $(x^2 + 2y^2) \bmod 8$ ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.
Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc *mod 8,* nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).
a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. AJ = JB, BR = RC, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad AC || JR un AC = 2JR. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6; y - 2).



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:
I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,
II. A atrodas otrpus R no J,
III. A atrodas otrpus J no R

i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā AC = 2JR, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6;y - 2).

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y), bet otras - (x + 6, y + 2), atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.