Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 7. klasei

1. Normālā cena sastāv no pamatcenas plus 21% no pamatcenas (pievienotās vērtības nodoklis - PVN). Veikals JUSK piedāvā akciju “Atceļam PVN!”, piešķirot 21% atlaidi normālajai cenai. Vai akcijas cena ir vienāda ar pamatcenu? Ja nē, kādai jābūt atlaidei no normālās cenas, lai pamatcena sakristu ar akcijas cenu?

2. Lifts var pārvadāt ne vairāk kā 12 pieaugušos vai 20 bērnus. Kāds ir lielākais bērnu skaits, cik var braukt liftā kopā ar 9 pieaugušajiem?

3. Svētdien Anna sāka lasīt grāmatu, kurā ir 335 lappuses. Viņa katru dienu izlasīja 4 lappuses, izņemot svētdienas - katru svētdienu viņa izlasīja 25 lappuses. Cik dienās Anna izlasīja grāmatu?

4. Doti trīs skaitļi. Pirmā un otrā skaitļa reizinājums ir pozitīvs. Pirmā un trešā skaitļa reizinājums ir negatīvs. Kāds ir otrā un trešā skaitļa reizinājums?

5. Kārlis izmērīja viena šaurleņķu trijstūra visus leņķus un viena platleņķa trijstūra visus leņķus. Četri no iegūtajiem rezultātiem bija 120º, 80º, 55º, 10º. Noteikt šaurleņķu trijstūra visu leņķu lielumus. (Trijstūra leņķu summa ir 180º)

6. Vai ar diviem kociņiem, kuru garumi ir tieši 8 cm un 12 cm, var atlikt tieši 70 cm garu nogriezni, ja ir dots arī rakstāmais, ar kuru drīkst atzīmēt izmērītos attālumus?

7. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

8. Uz kādas salas dzīvo 21 cilvēks. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā patiesību (patiesais) vai arī vienmēr melo (melis). Viņi visi nostājušies rindā viens aiz otra. Pirmais apgalvo, ka visi aiz viņa rindā stāvošie ir meļi. Katrs no pārējiem saka, ka tieši viņam priekšā stāvošais cilvēks ir melis. Cik meļu dzīvo uz salas?

9. Bruņurupucis sacentās ar Zaķi 10km skrējienā. Bruņurupucis skrēja ar ātrumu 1km/h, bet Zaķis - 20km/h. Lai kaitinātu Bruņurupuci, Zaķis nolēma tieši pirms finiša griezties apkārt un skriet līdz Bruņurupucim; tad atkal skriet uz finišu. Tā viņš atkārtoja daudzas reizes, līdz Bruņurupucis sasniedza finišu. Cik lielu attālumu noskrēja Zaķis?

10. Kurš ir mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1, t.i., dalot ar 2 atlikums ir 1, dalot ar 3 atlikums ir 1, utt.

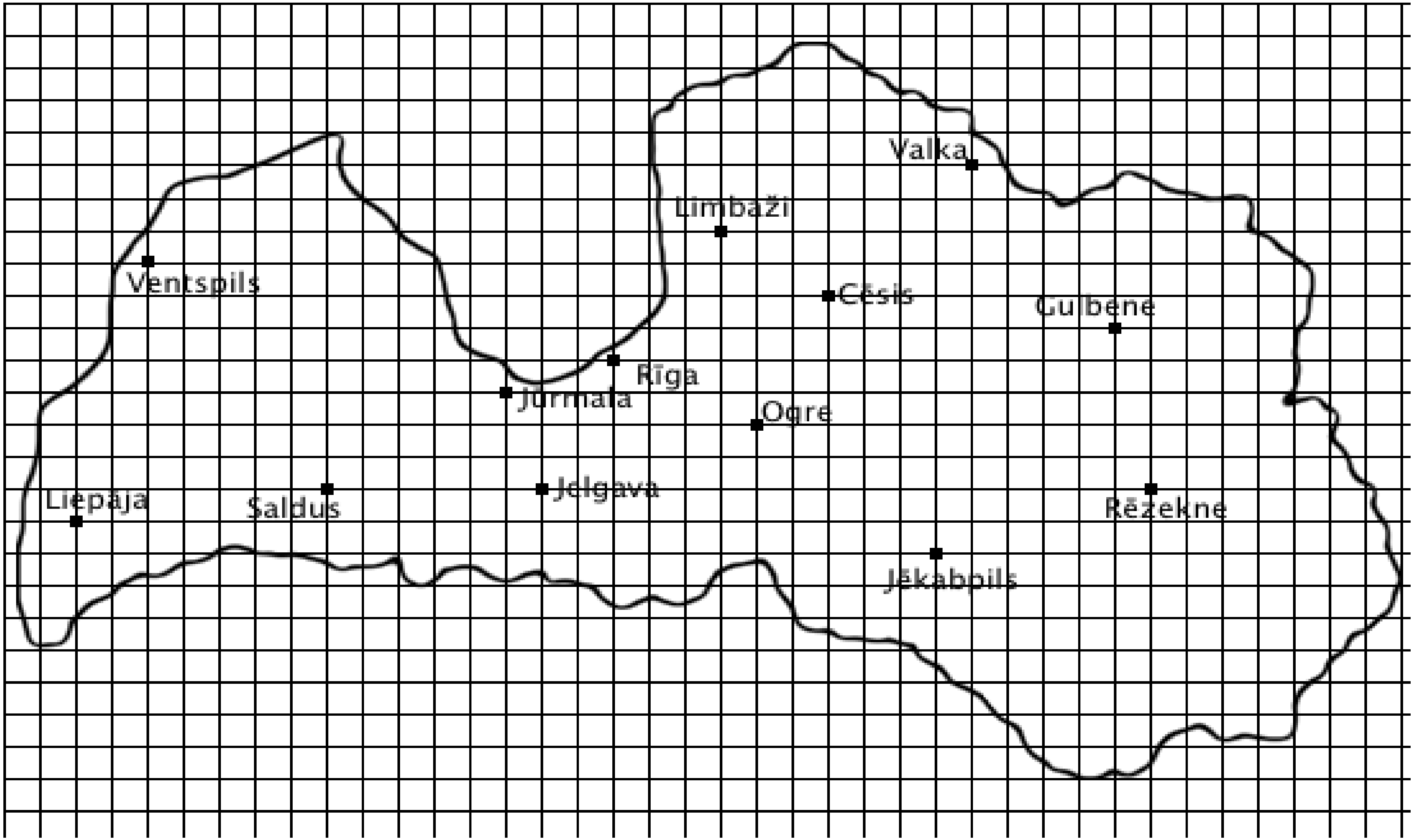
11. Viena taisne plakni sadala divās daļās. Divas taisnes to var sadalīt trijās vai četrās daļās. Cik daļās plakni var sadalīt četras taisnes? Ilustrējiet katru gadījumu ar piemēru!

12. 200 cilvēki – 105 sievietes un 95 vīrieši tiek sadalīti nejauši izvēlētā kārtībā divās rindās – katrā pa 100 cilvēkiem. Katri 2 pretī stāvošie cilvēki (kopā 100 šādi pāri) sarokojās. Pierādīt, ka „sieviete-sieviete" rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis".

13. Katru sestdienu 18 no 23 Orbitrekiem ir jāierodas uz apaļā galda sanāksmi. Tā kā Orbitreki ir karstasinīgi, tad, blakus apsēžoties 4 Orbitrekiem, noteikti sāksies ķīviņš. Pierādiet, ka nav pagājusi ne sestdiena bez savstarpēja Orbitreku ķīviņa, ja zināms, ka pie galda ir 23 sēdvietas!

14. Uz 10 x 10 laukuma katra lauciņa ir uzlikta spuldzīte. Sākotnēji ieslēgta ir tikai viena spuldzīte stūra lauciņā. Ar katru gājienu ir atļauts izvēlēties jebkuru laukuma kolonnu vai rindiņu un nomainīt visu tajā esošu spuldzīšu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu, no izslēgta uz ieslēgtu). Vai, vairākkārt izdarot gājienus, var panākt, ka ieslēgtā stāvoklī ir tieši puse no visām spuldzītēm?

15. iDžejs, garlaicības mākts, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt parelēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs – Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?


Valka
Limbaži
Ventspils
Cēsis
Gulbene
Rīga
Jūrmala
Ogre
Liepāja
Saldus
Jelgava
Rēzekne
Jēkabpils

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 8. klasei

1. Normālā cena sastāv no pamatcenas plus 21% no pamatcenas (pievienotās vērtības nodoklis - PVN). Veikals JUSK piedāvā akciju “Atceļam PVN!”, piešķirot 21% atlaidi normālajai cenai. Vai akcijas cena ir vienāda ar pamatcenu? Ja nē, kādai jābūt atlaidei no normālās cenas, lai pamatcena sakristu ar akcijas cenu?

2. Andžejs iedomājās skaitli un kāpināja to kvadrātā. Kāds var būt šī kvadrāta pēdējais cipars?

3. Edgars uz metamā kauliņa 6 skaldnēm uzrakstīja skaitļus 14, 6, 2, 18, 22, 10. Zane uz sava metamā kauliņa drīkst uzrakstīt skaitļus, kas ir par 1, 2 vai 3 mazāki vai lielāki kā jebkurš no Edgara uzrakstītajiem skaitļiem. Edgars Zanei apsolīja, ja, metot abus kauliņus, uzmesto skaitļu summa uz tiem būs 24, viņš viņai uzdāvinās ceļojumu uz Havaju salām. Vai Zane skaitļus uz sava kauliņa var uzrakstīt tā, lai viņai būtu iespēja tikt pie ceļojuma?

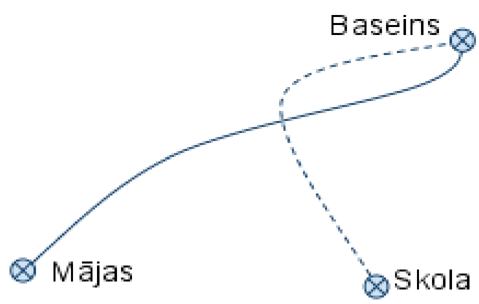
4. Doti veseli skaitļi a un b un zināms, ka $2a+3b$ un $4a+5b$ dalās ar 7. Pierādi, ka gan a, gan b dalās ar 7.

5. Pierādi, ka izliektā četrstūrī ABCD izpildās nevienādība AC + BD > AB + CD.

6. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

7. Nosauc visus skaitļus no 1 līdz 100, kuriem izpildās šāda īpašība: skaitli, dalot ar 3, atlikums ir 2, bet, dalot ar 5, atlikums ir 4. Cik tādu skaitļu ir no 1 līdz 1000?

8. Mindaugs no mājām uz baseinu iet pa ceļu, kas kartē uzzīmēts ar nepārtrauktu līniju, bet no skolas uz baseinu - pa ceļu, kurš iezīmēts ar raustītu līniju. Turklāt viņš apgalvo, ka katrs no ceļiem ir īsākais iespējamais. Kādā gadījumā viņam var būt taisnība?



9. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem x un y ir spēkā $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

10. 200 cilvēki – 105 sievietes un 95 vīrieši tiek sadalīti nejauši izvēlētā kārtībā divās rindās – katrā pa 100 cilvēkiem. Katri 2 pretī stāvošie cilvēki (kopā 100 šādi pāri) sarokojās. Pierādīt, ka „sieviete-sieviete" rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis".

11. Katru sestdienu 18 no 23 Orbitrekiem ir jāierodas uz apaļā galda sanāksmi. Tā kā Orbitreki ir karstasinīgi, tad, blakus apsēžoties 4 Orbitrekiem, noteikti sāksies ķīviņš. Pierādiet, ka nav pagājusi ne sestdiena bez savstarpēja Orbitreku ķīviņa, ja zināms, ka pie galda ir 23 sēdvietas!

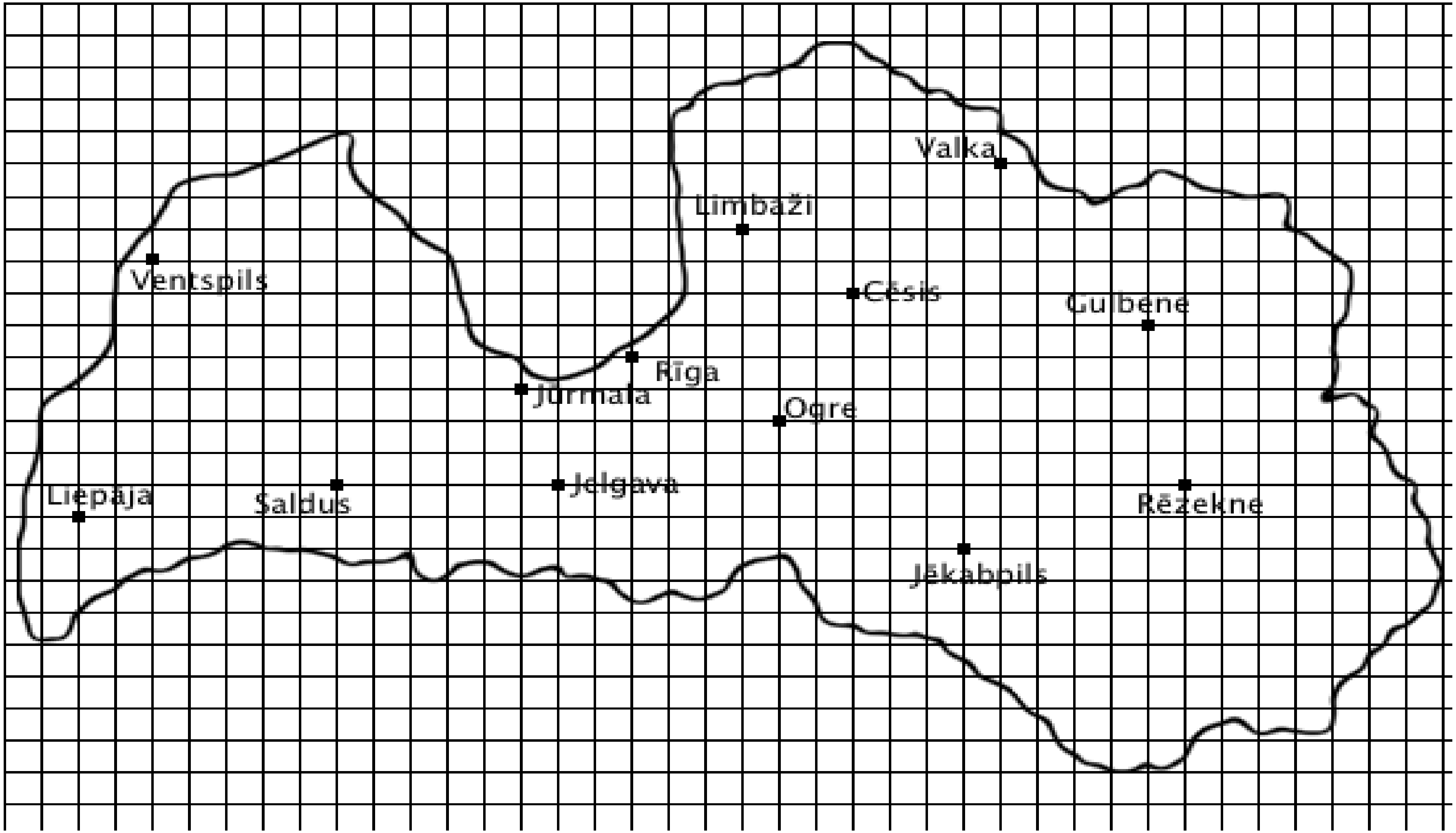
12. Hokeja čempionātā piedalās 27 komandas. Tās ir sadalītas 3 vienādi lielās konferencēs. Čempionāta nolikumā ir noteikts, ka katrai komandai ar savas konferences komandām ir jāizspēlē 16 spēles, bet ar pārējo konferenču komandām kopā jāizspēlē 9 spēles. Pierādiet, ka nolikums ir kļūdains, un hokeja komandām vajadzētu boikotēt šo čempionātu!

13. Uz 10 x 10 laukuma katra lauciņa ir uzlikta spuldzīte. Sākotnēji ieslēgta ir tikai viena spuldzīte stūra lauciņā. Ar katru gājienu ir atļauts izvēlēties jebkuru laukuma kolonnu vai rindiņu un nomainīt visu tajā esošu spuldzīšu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu, no izslēgta uz ieslēgtu). Vai, vairākkārt izdarot gājienus, var panākt, ka ieslēgtā stāvoklī ir tieši puse no visām spuldzītēm?

14. Jānis un Līga nopirka taisnstūra formas šokolādi, kas sastāv no 6x8 vienādiem šokolādes kubiciņiem. Jānis izdomāja spēli. Katrs spēlētājs (viens pēc otra) drīkst sadalīt šokolādi, laužot to pa taisnu līniju un tikai pa līniju, kas atdala šokolādes kubiciņus vienu no otra. Tā, piemēram, Jānis savā gājienā var sadalīt šokolādi divos gabalos – 2x6 un 6x6 izmērā. Līga savā gājienā tagad var, piemēram, 6x6 gabalu sadalīt 1x6 un 5x6 gabalos, vai, piemēram, sadalīt 2x6 gabalu 1x2 un 5x2 gabalos. Spēlētājs, kas var izdarīt pēdējo gājienu, uzvar un drīkst apēst visu šokolādi. Spēli sāk Jānis.

a) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi pareizi spēlējot?
b) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi, ja sākotnējais šokolādes izmērs ir 7 x 5 gabaliņi?

15. iDžejs, garlaicības mākts, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt parelēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs - Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?


Valka
Limbaži
Ventspils
Cēsis
Gulbene
Rīga
Jūrmala
Ogre
Liepāja
Saldus
Jelgava
Rēzekne
Jēkabpils

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 9. klasei

1. Pierādīt, ka eksistē divas tādas dažādas skaitļa 7 pakāpes, ka to starpība dalās ar 2010.

2. Bruņurupucis sacentās ar Zaķi 10km skrējienā. Bruņurupucis skrēja ar ātrumu 1km/h, bet Zaķis - 20km/h. Lai kaitinātu Bruņurupuci, Zaķis nolēma tieši pirms finiša griezties apkārt un skriet līdz Bruņurupucim; tad atkal skriet uz finišu. Tā viņš atkārtoja daudzas reizes, līdz Bruņurupucis sasniedza finišu. Cik lielu attālumu noskrēja Zaķis?

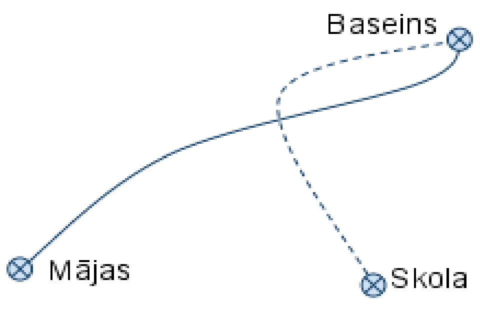
3. Kurš ir mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1, t.i., dalot ar 2 atlikums ir 1, dalot ar 3 atlikums ir 1, utt.

4. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem x un y ir spēkā $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

5. Uz kādas salas dzīvo 21 cilvēks. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā patiesību (patiesais) vai arī vienmēr melo (melis). Viņi visi nostājušies rindā viens aiz otra. Pirmais apgalvo, ka visi aiz viņa rindā stāvošie ir meļi. Katrs no pārējiem saka, ka tieši viņam priekšā stāvošais cilvēks ir melis. Cik meļu dzīvo uz salas?

6. Viena taisne plakni sadala divās daļās. Divas taisnes to var sadalīt trijās vai četrās daļās. Cik daļās plakni var sadalīt četras taisnes? Ilustrējiet katru gadījumu ar piemēru!

7. Mindaugs no mājām uz baseinu iet pa ceļu, kas kartē uzzīmēts ar nepārtrauktu līniju, bet no skolas uz baseinu - pa ceļu, kurš iezīmēts ar raustītu līniju. Turklāt viņš apgalvo, ka katrs no ceļiem ir īsākais iespējamais. Kādā gadījumā viņam var būt taisnība?



8. 200 cilvēki – 105 sievietes un 95 vīrieši tiek sadalīti nejauši izvēlētā kārtībā divās rindās – katrā pa 100 cilvēkiem. Katri 2 pretī stāvošie cilvēki (kopā 100 šādi pāri) sarokojās. Pierādīt, ka „sieviete-sieviete” rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis”.

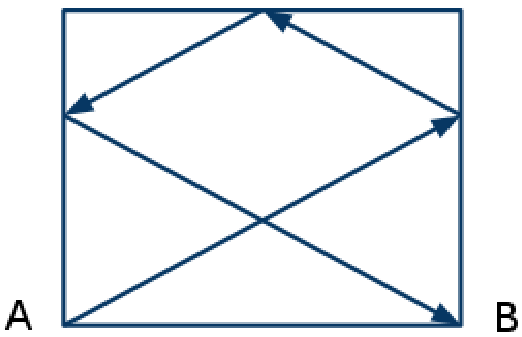
9. Kārbā ir 2010 konfektes. Katru minūti kāds no tās vai nu izņem trīs konfektes, vai pieliek 6 konfektes. Pierādi, ka nepienāks tāds brīdis, kad kārbā ir tieši 1010 konfektes.

10. Hokeja čempionātā piedalās 27 komandas. Tās ir sadalītas 3 vienādi lielās konferencēs. Čempionāta nolikumā ir noteikts, ka katrai komandai ar savas konferences komandām ir jāizspēlē 16 spēles, bet ar pārējo konferenču komandām kopā jāizspēlē 9 spēles. Pierādiet, ka nolikums ir kļūdains, un hokeja komandām vajadzētu boikotēt šo čempionātu!

11. Jānis un Līga nopirka taisnstūra formas šokolādi, kas sastāv no 6x8 vienādiem šokolādes kubiciņiem. Jānis izdomāja spēli. Katrs spēlētājs (viens pēc otra) drīkst sadalīt šokolādi, laužot to pa taisnu līniju un tikai pa līniju, kas atdala šokolādes kubiciņus vienu no otra. Tā, piemēram, Jānis savā gājienā var sadalīt šokolādi divos gabalos – 2x6 un 6x6 izmērā. Līga savā gājienā tagad var, piemēram, 6x6 gabalu sadalīt 1x6 un 5x6 gabalos, vai, piemēram, sadalīt 2x6 gabalu 1x2 un 5x2 gabalos. Spēlētājs, kas var izdarīt pēdējo gājienu, uzvar un drīkst apēst visu šokolādi. Spēli sāk Jānis.

a) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi pareizi spēlējot?
b) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi, ja sākotnējais šokolādes izmērs ir m x n gabaliņi?

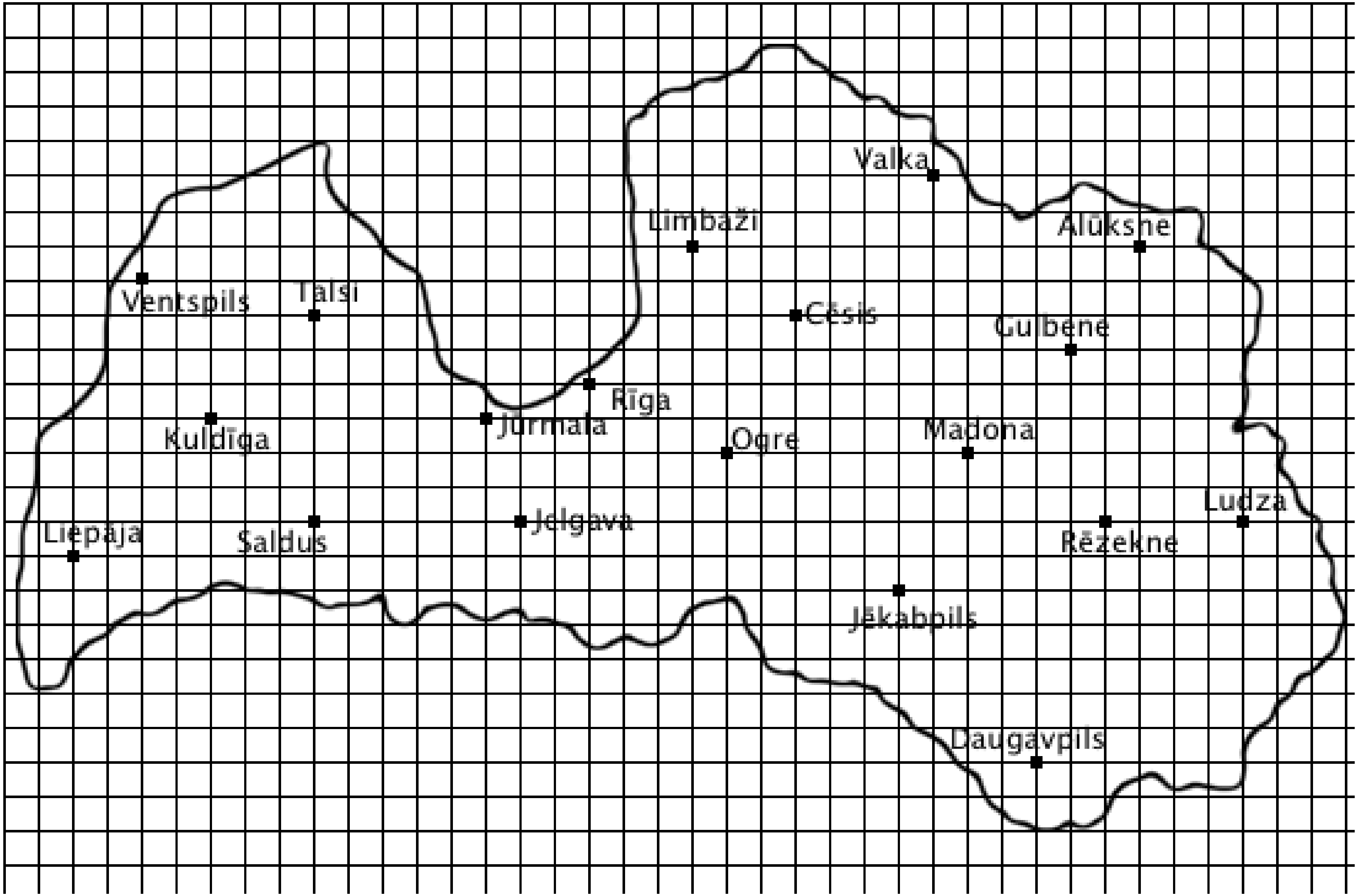
12. Biljarda galdam ir kvadrāta forma; tā malas garums ir 2m. Bumba, kuru izsita no stūra A, atsitās trīs reizes pret galda malām un nonāca stūrī B (skat. zīmējumu). Aprēķināt bumbas veiktā ceļa garumu.



13. Līna iedomājās vienu no 52 kārtīm normālā komplektā. Renārs mēģinās uzminēt, kuru kārti Līna iedomājusies, uzdodot tikai jautājumus, uz kuriem var atbildēt ar "jā" vai "nē". Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuriem Renārs noteikti var uzzināt pareizo kārti?

14. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 = 8z + 5$ nav atrisināms veselos skaitļos.

15. iDžejs, garlaicības mākts, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt parelēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs - Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?



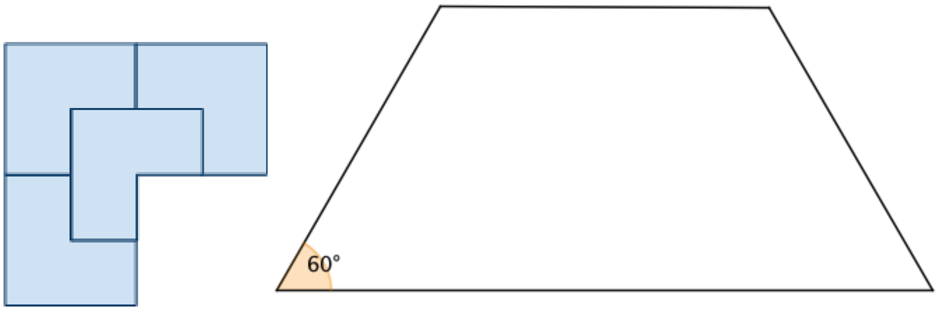
Valka
Limbaži
Alūksne
Ventspils
Talsi
Cēsis
Gulbene
Rīga
Kuldīga
Jūrmala
Ogre
Madona
Ludza
Liepāja
Saldus
Jelgava
Rēzekne
Jēkabpils
Daugavpils

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas.
Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 10. klasei

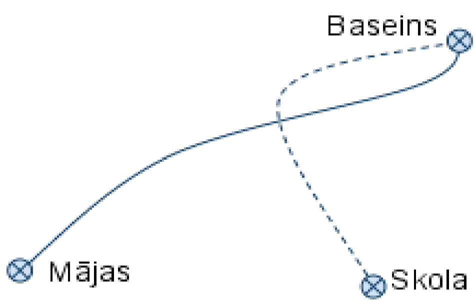
1. Figūra zīmējumā ir sadalīta 4 daļās, kas ir līdzīgas lielajai figūrai. Sadali doto trapeci (tās sānu malas vienādas ar īsāko pamatu), izmantojot četras tai līdzīgas, savā starpā vienādas trapeces.



2. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

3. Atrisināt nevienādību: $\dfrac{(x^2+6x+5)(x+2)(x^2-5x+4)}{x^2(x-4)(6-x-x^2)(x^2-2x-15)(x-2)(3-x)} \geq 0$

4. Mindaugs no mājām uz baseinu iet pa ceļu, kas kartē uzzīmēts ar nepārtrauktu līniju, bet no skolas uz baseinu - pa ceļu, kurš iezīmēts ar raustītu līniju. Turklāt viņš apgalvo, ka katrs no ceļiem ir īsākais iespējamais. Kādā gadījumā viņam var būt taisnība?



5. Reāliem a, b, c pierādīt $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

6. Reksis pie 1m x 1m kvadrātveida suņubūdas piesiets ar 1.5 m garu ķēdi. Cik lielu laukumu Reksis var apsargāt, ja ķēde ir piestiprināta suņubūdas malas vidū?

7. Bruņurupucis sacentās ar Zaķi 10km skrējienā. Bruņurupucis skrēja ar ātrumu 1km/h, bet Zaķis - 20km/h. Lai kaitinātu Bruņurupuci, Zaķis nolēma tieši pirms finiša griezties apkārt un skriet līdz Bruņurupucim; tad atkal skriet uz finišu. Tā viņš atkārtoja daudzas reizes, līdz Bruņurupucis sasniedza finišu. Cik lielu attālumu noskrēja Zaķis?

8. Pierādīt, ka eksistē divas tādas dažādas skaitļa 7 pakāpes, ka to starpība dalās ar 2010.

9. Doti veseli skaitļi a un b un zināms, ka $2a+3b$ un $4a+5b$ dalās ar 7. Pierādi, ka gan a, gan b dalās ar 7.

10. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 = 8z + 5$ nav atrisināms veselos skaitļos.

11. Uz 10 x 10 laukuma katra lauciņa ir uzlikta spuldzīte. Sākotnēji ieslēgta ir tikai viena spuldzīte stūra lauciņā. Ar katru gājienu ir atļauts izvēlēties jebkuru laukuma kolonnu vai rindiņu un nomainīt visu tajā esošu spuldzīšu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu, no izslēgta uz ieslēgtu). Vai, vairākkārt izdarot gājienus, var panākt, ka ieslēgtā stāvoklī ir tieši puse no visām spuldzītēm?

12. Līna iedomājās vienu no 52 kārtīm normālā komplektā. Renārs mēģinās uzminēt, kuru kārti Līna iedomājusies, uzdodot tikai jautājumus, uz kuriem var atbildēt ar "jā" vai "nē". Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuriem Renārs noteikti var uzzināt pareizo kārti?

13. Kurš skaitlis ir lielāks: 99^{2010} vai 2010^{1345} ?

14. Uz tāfeles uzrakstīti visi pāra skaitļi no 2 līdz 2^{2010}. Fredis nodzēš jebkurus 2 skaitļus a un b un uzraksta to vietā $\frac{ab}{4}$. Tā viņš turpina, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis, apzīmēsim to ar k. Pierādīt:

a) k ir naturāls;
b) k+1 ir savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

15. Martai sestdienu pēcpusdienas ir ģimenes dienas - viņa brauc pie kādas no savām omēm. Viena ome dzīvo Purvciemā, bet otra - Zolitūdē. Marta brauc no tieši divu autobusu maršrutu galapunkta. Viens no maršrutiem ved uz Zolitūdi, bet otrs - uz Purvciemu, turklāt katrā maršrutā autobusi kursē ļoti regulāri - ar 10 minūšu intervālu. Marta abas omes ļoti mīl, tāpēc vienmēr ir grūti izvēlēties - pie kuras braukt. Tāpēc Marta nolēma šo izvēli atstāt nejaušībai - viņa nejaušā laikā sestdienas pēcpusdienā aiziet uz pieturu un kāpj pirmajā autobusā, kas tajā pietur. Tomēr 2009. gadā viņai tikai 6 sestdienas sanāca ciemoties pie Zolitūdes omes, bet 46 sestdienas - pie Purvciema omes. Kāds tam varētu būt iemesls?

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

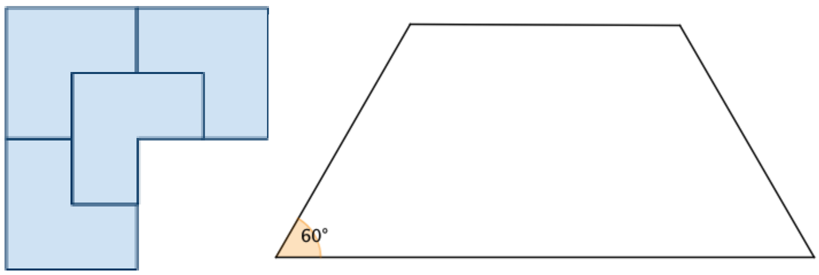
Uzdevumi 11. klasei

1. Hokeja čempionātā piedalās 27 komandas. Tās ir sadalītas 3 vienādi lielās konferencēs. Čempionāta nolikumā ir noteikts, ka katrai komandai ar savas konferences komandām ir jāizspēlē 16 spēles, bet ar pārējo konferenču komandām kopā jāizspēlē 9 spēles. Pierādiet, ka nolikums ir kļūdains, un hokeja komandām vajadzētu boikotēt šo čempionātu!

2. Edgars uz metamā kauliņa 6 skaldnēm uzrakstīja skaitļus 14, 6, 2, 18, 22, 10. Zane uz sava metamā kauliņa drīkst uzrakstīt skaitļus, kas ir par 1, 2 vai 3 mazāki vai lielāki kā jebkurš no Edgara uzrakstītajiem skaitļiem. Edgars Zanei apsolīja, ja, metot abus kauliņus, uzmesto skaitļu summa uz tiem būs 24, viņš viņai uzdāvinās ceļojumu uz Havaju salām. Vai Zane skaitļus uz sava kauliņa var uzrakstīt tā, lai viņai būtu iespēja tikt pie ceļojuma?

3. Kārbā ir 2010 konfektes. Katru minūti kāds no tās vai nu izņem trīs konfektes, vai pieliek 6 konfektes. Pierādi, ka nepienāks tāds brīdis, kad kārbā ir tieši 1010 konfektes.

4. Figūra zīmējumā ir sadalīta 4 daļās, kas ir līdzīgas lielajai figūrai. Sadali doto trapeci (tās sānu malas vienādas ar īsāko pamatu), izmantojot četras tai līdzīgas, savā starpā vienādas trapeces.



5. Katru sestdienu 18 no 23 Orbitrekiem ir jāierodas uz apaļā galda sanāksmi. Tā kā Orbitreki ir karstasinīgi, tad, blakus apsēžoties 4 Orbitrekiem, noteikti sāksies ķīviņš. Pierādiet, ka nav pagājusi ne sestdiena bez savstarpēja Orbitreku ķīviņa, ja zināms, ka pie galda ir 23 sēdvietas!

6. Dotas 6 pēc ārēja izskata vienādas monētās un sviru svari bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.

7. Reāliem pozitīviem a,b,c pierādīt $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

8. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 = 8z + 5$ nav atrisināms veselos skaitļos.

9. Kurš skaitlis ir lielāks: 99^{2010} vai 2010^{1345} ?

10. Jānis un Līga nopirka taisnstūra formas šokolādi, kas sastāv no 6x8 vienādiem šokolādes kubiciņiem. Jānis izdomāja spēli. Katrs spēlētājs (viens pēc otra) drīkst sadalīt šokolādi, laužot to pa taisnu līniju un tikai pa līniju, kas atdala šokolādes kubiciņus vienu no otra. Tā, piemēram, Jānis savā gājienā var sadalīt šokolādi divos gabalos – 2x6 un 6x6 izmērā. Līga savā gājienā tagad var, piemēram, 6x6 gabalu sadalīt 1x6 un 5x6 gabalos, vai, piemēram, sadalīt 2x6 gabalu 1x2 un 5x2 gabalos. Spēlētājs, kas var izdarīt pēdējo gājienu, uzvar un drīkst apēst visu šokolādi. Spēli sāk Jānis.

a) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi pareizi spēlējot?

b) Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi, ja sākotnējais šokolādes izmērs ir m x n gabaliņi?

11. Izteikt summu 1 + 11 + 111 + ... + $\underbrace{111...111}_{\text{n reizes}}$ kā funkciju no n.

12. Uz tāfeles uzrakstīti visi pāra skaitļi no 2 līdz 2^{2010}. Fredis nodzēš jebkurus 2 skaitļus a un b un uzraksta to vietā $\frac{ab}{4}$. Tā viņš turpina, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis, apzīmēsim to ar k. Pierādīt:

a) k ir naturāls;

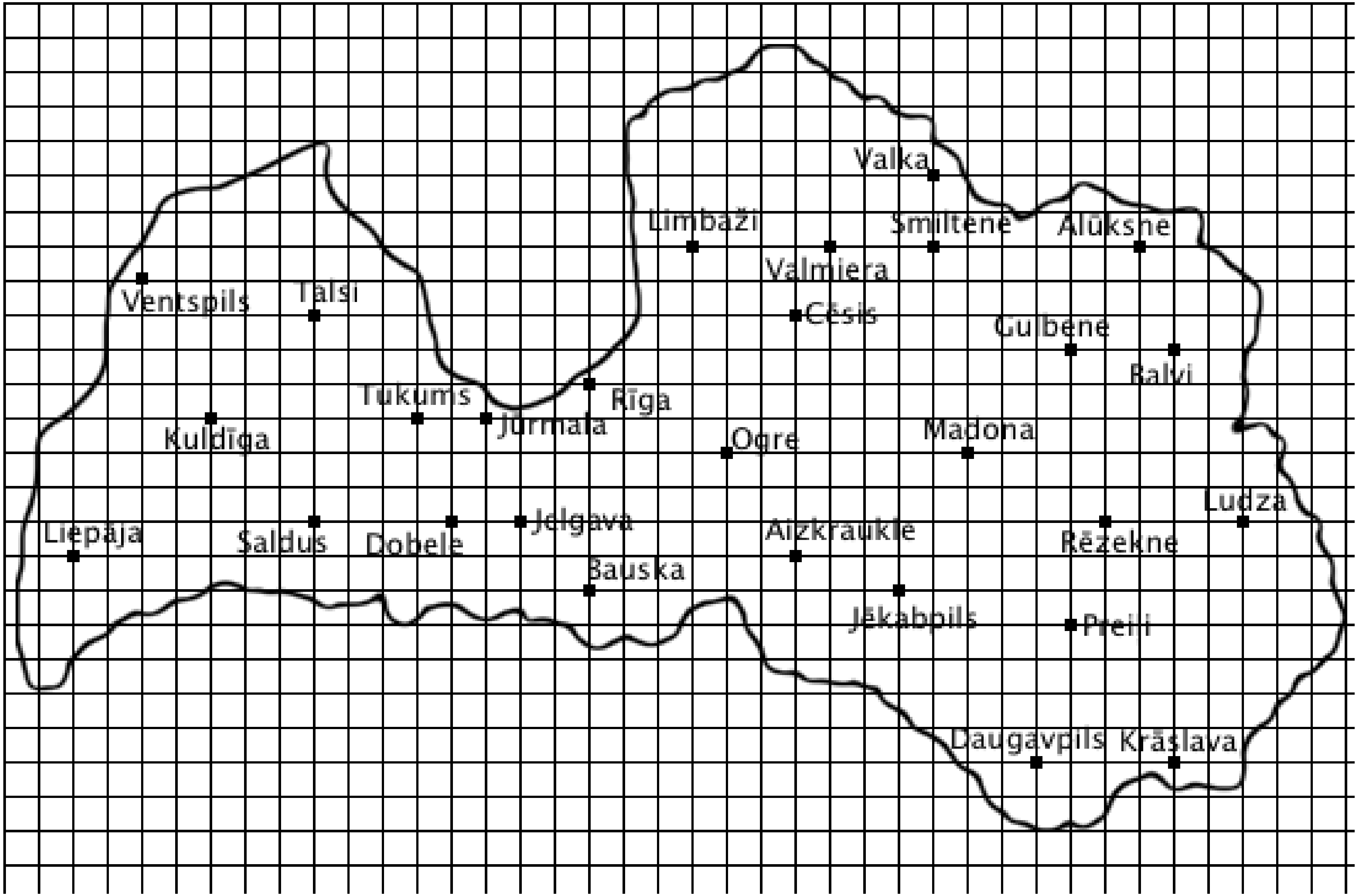
b) k+1 ir savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

13. Izsakiet a kā funkciju no x: $x^2 + a\sqrt{4x+1} - a^2 = 0$

Atrisināt reālos skaitļos: $x^2 + 3\sqrt{4x+1} - 9 = 0$

14. Martai sestdienu pēcpusdienas ir ģimenes dienas - viņa brauc pie kādas no savām omēm. Viena ome dzīvo Purvciemā, bet otra - Zolitūdē. Marta brauc no tieši divu autobusu maršrutu galapunkta. Viens no maršrutiem ved uz Zolitūdi, bet otrs - uz Purvciemu, turklāt katrā maršrutā autobusi kursē ļoti regulāri - ar 10 minūšu intervālu. Marta abas omes ļoti mīl, tāpēc vienmēr ir grūti izvēlēties - pie kuras braukt. Tāpēc Marta nolēma šo izvēli atstāt nejaušībai - viņa nejaušā laikā sestdienas pēcpusdienā aiziet uz pieturu un kāpj pirmajā autobusā, kas tajā pietur. Tomēr 2009. gadā viņai tikai 6 sestdienas sanāca ciemoties pie Zolitūdes omes, bet 46 sestdienas - pie Purvciema omes. Kāds tam varētu būt iemesls?

15. iDžejs, garlaicības mākts, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt parelēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs - Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?


Valka
Limbaži
Smiltene
Alūksne
Valmiera
Ventspils
Talsi
Cēsis
Gulbene
Balvi
Tukums
Rīga
Jūrmala
Kuldīga
Ogre
Madona
Ludza
Liepāja
Saldus
Dobele
Jelgava
Aizkraukle
Rēzekne
Bauska
Jēkabpils
Preiļi
Daugavpils
Krāslava