

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

7. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Pieņemsim, ka pamatcena ir x latu. Tad normālā cena ir $x + \frac{21}{100}x = \frac{121}{100}x$. Piešķirot 21% atlaidi, mēs iegūstam akcijas cenu, kas ir $100\% - 21\% = 79\%$ no normālās cenas, t.i.
$$\frac{79}{100} + \frac{121}{100}x = \frac{9559}{10000}x < x$$
. Tātad akcijas cena ir mazāka par pamatcenu. No šī arī redzams, ka pamatcena ir $\frac{100}{121}$ no normālās cenas. Tādēļ pareizā atlaide būtu bijusi $\frac{21}{121}$ jeb, izsakot apaļos procentos, 17%.
2. Ja liftā brauc 9 pieaugušie, tad aizņemtas ir $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ lifta. Tātad brīva vēl $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ lifta.
Tātad liftā vēl ir vieta ne vairāk kā $\frac{1}{4}$ no $20 = 5$ bērniem.
3. No pirmdienas līdz sestdienai Anna izlasa $6 \cdot 4 = 24$ lapaspuses. Tātad vienā nedēļā Anna izlasa $24 + 25 = 49$ lapaspuses. Skaidrs, ka Anna grāmatu lasīs 6 pilnas nedēļas (jo $335 : 49 = 6$ atl. 41), un pāri paliks 41 lapaspuse, ko lasīt. Tā kā Anna sāka lasīt svētdienā, tad pēc 6 pilnām nedēļām viņa lasīšanu arī turpinās svētdienā, kad izlasīs 25 lapaspuses. Atlikušās 16 lapaspuses Anna izlasīs 4 dienās. Tātad kopā Anna grāmatu izlasīs $6 \cdot 7 + 1 + 4 = 47$ dienās.
4. I. $a \cdot b > 0$
 $a \cdot c < 0$
 a un b ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi. Ja a (un tātad - arī b) ir pozitīvs, tad c ir negatīvs, ja a (un b) ir negatīvs, tad c ir pozitīvs. Skaidrs, ka viens no skaitļiem b un c ir pozitīvs, bet otrs - negatīvs, tātad reizinājums - negatīvs.
II. Ja reizinājums ir pozitīvs, resp., negatīvs, tad neviens no skaitļiem nav nulle. Apskatām reizinājumu $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) < 0$. Iegūstam $a^2 b \cdot c < 0$. Tā kā $a^2 > 0$, tad $b \cdot c < 0$.
5. Tā kā $120^\circ + 80^\circ > 180^\circ$, tad 120° leņķis un 80° leņķis būs katrs savā trijstūrī, attiecīgi platleņķa trijstūrī un šaurleņķa trijstūrī. Ņemot vērā, ka $80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$, t.i., trešais leņķis šo divu leņķu veidotajā trijstūrī būs taisns, tad 10° leņķis būs vienā trijstūrī ar 120° leņķi. Platleņķa trijstūrī ir zināmi divi leņķi, tādējādi mēs varam izrēķināt arī trešo leņķi: $180^\circ - 120^\circ - 10^\circ = 50^\circ$. Tātad 55° grādu leņķis būs šaurleņķu trijstūrī, kuram trešais leņķis būs $180^\circ - 80^\circ - 55^\circ = 45^\circ$ grādus liels.
6. Invariantu metode. Abu kociņu garumi dalās ar 4, tātad arī jebkura to kombinācija dalīsies ar 4. Tā kā 70 nedalās ar 4, tad šādu garumu nomērīt nav iespējams.

7. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.

Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana $OO=OO$ $OO<OO$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.

2. svēršana (1.gad) $O=O$ $O<O$

Atkal ir iespējami divi iznākumi:

a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;

b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.

Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.

2. svēršana (2.gad) $OO=OO$ $OO<OO$

1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.

2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.

1. un 2. svēršana $O=O$ $O=O$ $O=O$ $O<O$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.

2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svāriem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svāriem.

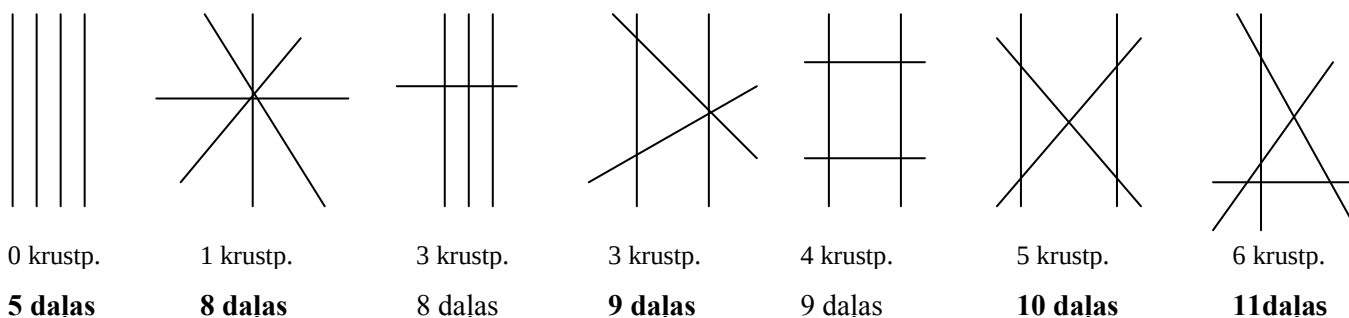
8. Ja pirmais saka patiesību, tad otrais un trešais ir meļi. Tā kā trešais apgalvo, ka viņam priekšā stāv melis, viņš saka patiesību - pretruna. Tātad pirmais ir melis. Otrā apgalvojums ir patiess, tātad tas ir patiesais; trešā- nepatiess, tātad trešais ir melis utt. Tā kā rindā kopā ir 21 cilvēks un pirmais, trešais, piektais, ..., divdesmitpirmais ir meļi, tad kopā ir 11 meļi.
9. Bruņurupucis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupucis skrējieni sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupuci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupucis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.

10. A - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1. A ir nākamais skaitlis aiz mazākā naturālā skaitļa, kas dalās ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9. Šādam skaitlim ir jādalās ar 5, 7, 8, 9 (tad tas dalīsies arī ar 2, 3, 4, 6). $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Var ievērot arī, ka $(A-1) = \text{MKD}^1(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Tātad $A = 2520 + 1 = 2521$

¹MKD – mazākais kopīgais dalāmais.

11. Iespējamo plaknes daļu skaitu un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās). Skaidrs, ka daļu skaits, kādā mēs sadalīsim plakni, būs atkarīgs no tā, cik krustpunktus veidos dotās 4 taisnes. Tāpēc apskatīsim iespējamo krustpunktu skaitu. Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties $4 \cdot 3 / 2 = 6$ veidos.

To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taisņu paralelītāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taisņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).



12. Pieņemsim, ka bija k „vīrietis-sieviete” rokasspiedieni. Tad attiecīgi bija $105 - k$ sievietes, kas sarokojās savās starpā, un $95 - k$ vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par $(105 - k) - (95 - k) = 10$ vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete” rokasspiedieni bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis” rokasspiedieni.

13. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvietu un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\leq \frac{23 \cdot 3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17

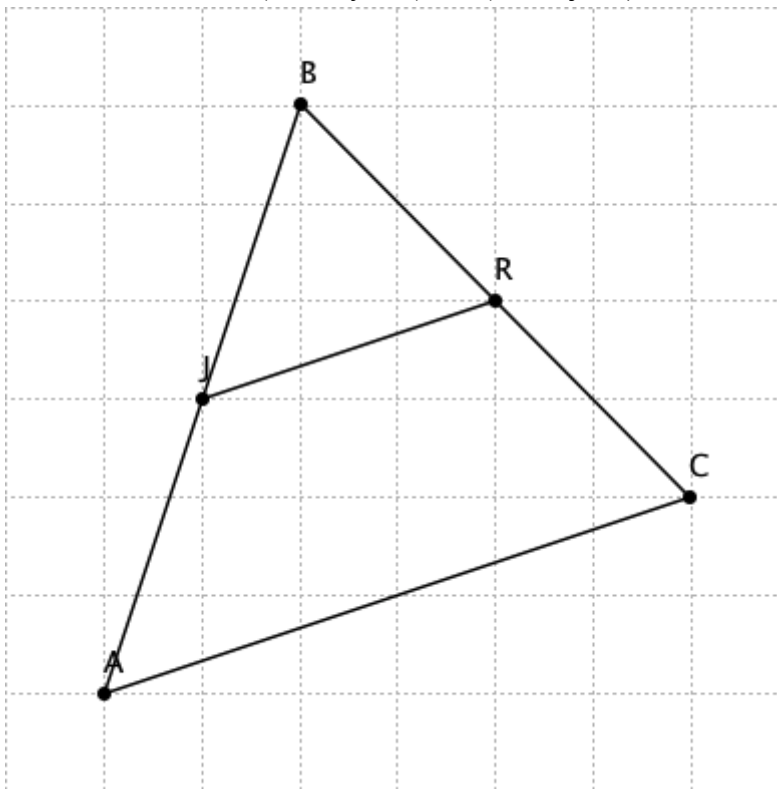
Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

14. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindīņā ir ieslēgtas i spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindīņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par i , bet

tajā pašā laikā palielināsim par $10 - i$, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par $-i + (10 - i) = 10 - 2i$, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldzīšu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldzīšu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).

a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. $AJ = JB$, $BR = RC$, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad $AC \parallel JR$ un $AC = 2JR$. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.



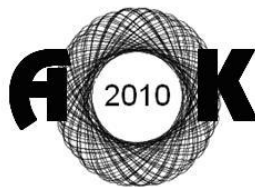
b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:

- I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,
- II. A atrodas otrpus R no J,
- III. A atrodas otrpus J no R
 - i. ne lielākā attālumā kā JR,
 - i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā $AC = 2JR$, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y) , bet otras - $(x + 6, y + 2)$, atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.



Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

8. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Pieņemsim, ka pamatcena ir x latu. Tad normālā cena ir $x + \frac{21}{100}x = \frac{121}{100}x$. Piešķirot 21% atlaidi, mēs iegūstam akcijas cenu, kas ir $100\% - 21\% = 79\%$ no normālās cenas, t.i.
- $$\frac{79}{100} + \frac{121}{100}x = \frac{9559}{10000}x < x.$$
- Tātad akcijas cena ir mazāka par pamatcenu. No šī arī redzams, ka pamatcena ir $\frac{100}{121}$ no normālās cenas. Tādēļ pareizā atlaide būtu bijusi $\frac{21}{121}$ jeb, izsakot apaļos procentos, 17%.

2. Skaidrs, ka kvadrāta pēdējais cipars būs atkarīgs tikai no sākotnējā skaitļa pēdējā cipara. Tātad mums jāapskata tikai 10 gadījumi:

Sākotnējā skaitļa pēdējais cipars	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
Tā kvadrāta pēdējais cipars	...0	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1

Ir seši varianti, kāds var būt kvadrāta pēdējais cipars – 0, 1, 4, 5, 6, 9.

3. Ievērosim, ka skaitļi uz Edgara metamā kauliņa dod atlikumu 2, dalot ar 4, t.i., mēs tos varam uzrakstīt formā $4k+2$ (kur k – naturāls skaitlis). Uz Zanes kauliņa tad būs uzrakstīt skaitļi $(4k+2)\pm 1$, 2, 3 un attiecīgi, metot abus kauliņus, skaitļu summa uz tiem būs $(8k+4)\pm 1$, 2, 3 jeb $4(2k+2)\pm 1$, 2, 3. Acīmredzams, ka skaitļu summa nedalīsies ar 4, tātad tā nekad nebūs 24, jo tas dalās ar 4.

4. Skaidrs, ka $2(2a+3b)$ dalās ar 7, tādēļ arī

$$2(2a+3b) - (4a+5b) \text{ dalās ar } 7$$

$$(4a - 4a + 6b - 5b) \text{ dalās ar } 7$$

$$b \text{ dalās ar } 7$$

Tā kā viens no $2a+3b$ saskaitāmajiem, t.i., $3b$ dalās ar 7, tad, lai $2a+3b$ dalītos ar 7, arī otram saskaitāmajam $2a$ jādalās ar 7. Tā kā skaitļiem 2 un 7 nav kopīgu dalītāju, tad a dalās ar 7.

5. Pēc trijstūru nevienādības:

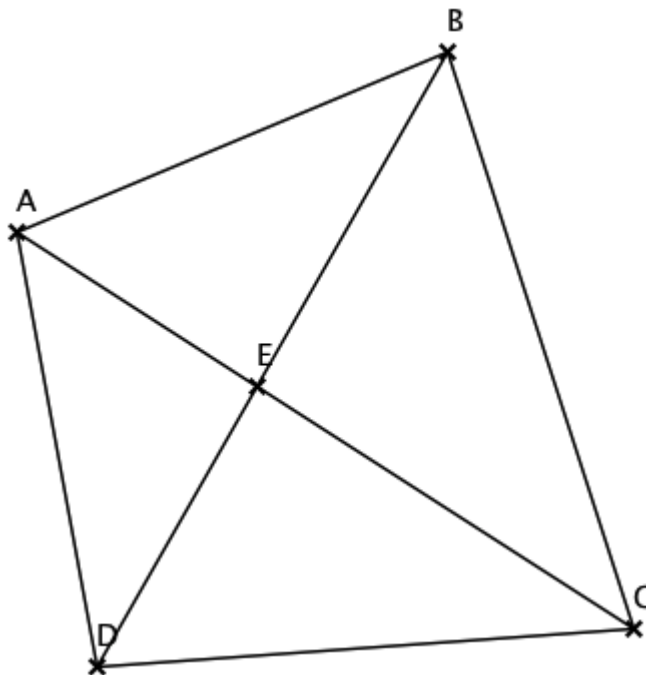
$$AE + EB > AB$$

$$DE + EC > CD$$

$$AE + EB + DE + EC > AB + CD$$

$$AE + EC + BE + ED > AB + CD$$

$$AC + BD > AB + CD$$



6. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.

Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana $OO=OO$ $OO<OO$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.

2. svēršana (1.gad) $O=O$ $O<O$

Atkal ir iespējami divi iznākumi:

a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;

b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.

Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.

2. svēršana (2.gad) $OO=OO$ $OO<OO$

- 1) Ja svāri būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.
- 2) Ja svāri nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.

1. un 2. svēršana

O=O O=O

O=O O<O

Ir iespējami divi gadījumi:

1) abās svēršanas reizēs svāri bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.

2) vienā no svēršanas reizēm svāri nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svāri ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svāriem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svāriem.

7. Ja skaitlis, dalot ar 5, dod atlikumu 4, tad to mēs varam uzrakstīt formā $5a + 4$ jeb $5a - 1$ (t.i., pieskaitot 1 tas dos atlikumā 0, dalot ar 5), kur a ir naturāls skaitlis. Analogi skaitli, kurš, dalot ar 3, dod atlikumā 2, mēs varam uzrakstīt kā $3b + 2$. Pēc uzdevumu nosacījumiem jāizpildās šādai vienādībai:

$$5a - 1 = 3b + 2$$

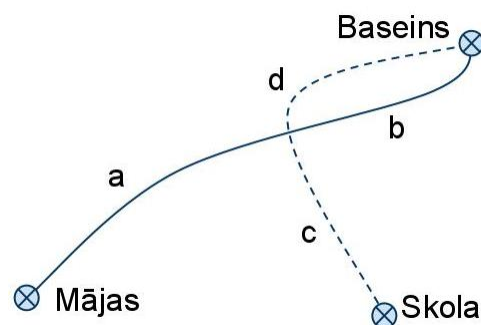
$$5a = 3(b + 1)$$

Tā kā labā puse dalās ar 3, bet kreisajā pusē 5 nav kopīgu dalītāju ar 3, tad, lai vienādībā izpildītos a jādalās ar 3. Tātad mūsu meklēto skaitli var uzrakstīt šādā formā $15c - 1$. Viegli pārlicināties, ka pirmais šāds skaitlis ir 14. Skaidrs, ka katrs piecpadsmitais skaitlis, sākot no 14, atbildīs mūsu prasībām. Starp skaitļiem no 1 līdz 100 ir seši šādi skaitļi: 14, 29, 44,

59, 74, 89. No 1 līdz 1000 būs ne vairāk kā $\frac{1000+1}{15} = 66\frac{11}{15}$ šādu skaitļu (jo $15N - 1 = 1000$,

kur N meklējamo skaitļu skaits), t.i., būs 66 skaitļi.

8. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar a, b, c, d . Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu b vai d . No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a + b \leq a + d$ un $c + d \leq c + b$. Tātad $b \leq d$ un $d \leq b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



9. Reizinām nevienādības puses ar xy (nevienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli).

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tātad nevienādība spēkā visiem pozitīviem x un y .

10. Pieņemsim, ka bija k „vīrietis-sieviete” rokasspiedienu. Tad attiecīgi bija $105 - k$ sievietes, kas sarokojās savās starpā, un $95 - k$ vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par $(105 - k) - (95 - k) = 10$ vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete” rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis” rokasspiedienu.

11. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvietā un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos

četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\leq \frac{23 \cdot 3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17

Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

12. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.

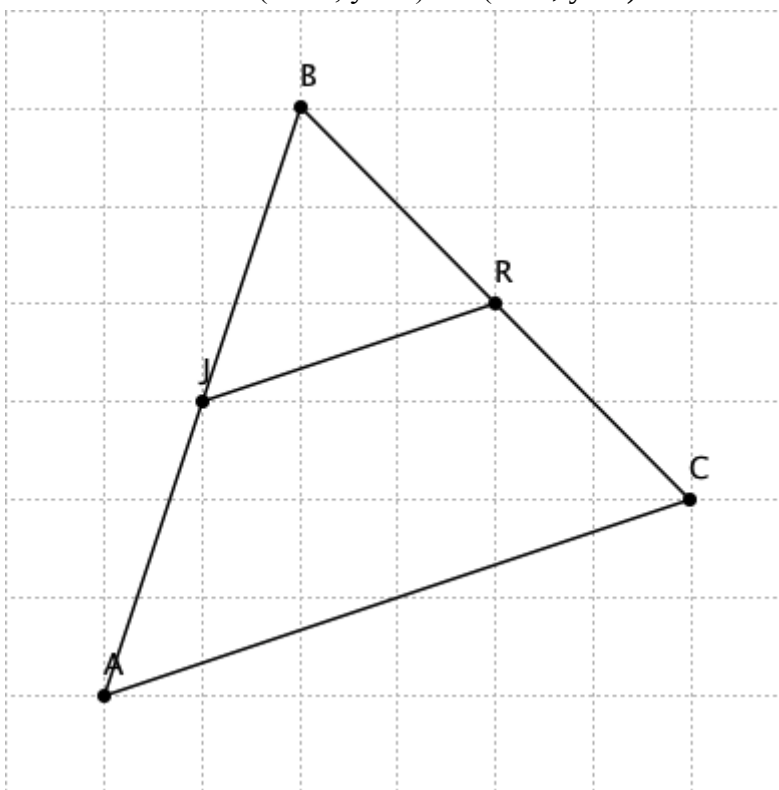
13. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindīņā ir ieslēgtas i spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindīņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par i , bet tajā pašā laikā palielināsim par $10 - i$, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par $-i + (10 - i) = 10 - 2i$, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldzīšu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldzīšu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

14. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru $m \times n$. Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta $m \cdot n$ gabaliņos ar izmēru 1×1 . Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas $(m \cdot n - 1)$ laušanas. Ja $m \cdot n$ ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis

otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja $m \cdot n$ ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6×8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).

a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. $AJ = JB$, $BR = RC$, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad $AC \parallel JR$ un $AC = 2JR$. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:

I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,

II. A atrodas otrpus R no J,

III. A atrodas otrpus J no R

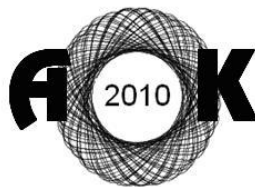
i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā $AC = 2JR$, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y) , bet otras - $(x + 6, y + 2)$, atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.



Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

9. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Vienkāršības labad var apskatīt skaitļa 7 pakāpes no 0. līdz 2010. pakāpei, tātad kopā 2011 skaitļus. Skaitli dalot ar 2010, tas var dot atlikumus no 0 līdz 2009, t.i., kopā 2010 dažādus atlikumus. Tādēļ pēc Dirihlē principa iegūstam, ka starp mūsu izvēlētajām 2011 skaitļa 7 pakāpēm, vismaz divas dos vienādus atlikumus, dalot ar 2010. Attiecīgi šo divu skaitļa 7 pakāpju starpība dalīsies ar 2010.
2. Bruņurupucis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupucis skrējieni sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupuci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupucis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.
3. A - mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks par 1, kuru dalot ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9 atlikums ir 1. A ir nākamais skaitlis aiz mazākā naturālā skaitļa, kas dalās ar katru no skaitļiem no 2 līdz 9. Šādam skaitlim ir jādalās ar 5, 7, 8, 9 (tad tas dalīsies arī ar 2, 3, 4, 6). $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Var ievērot arī, ka $(A-1) = \text{MKD}^1(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Tātad $A = 2520 + 1 = 2521$

¹MKD – mazākais kopīgais dalāmais.

4. Reizinām nevienādības puses ar xy (nevienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli).

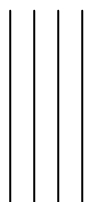
$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0$$

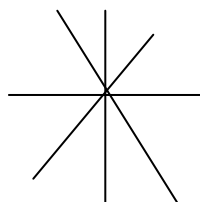
Reāla skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tātad nevienādība spēkā visiem pozitīviem x un y .

5. Ja pirmais saka patiesību, tad otrais un trešais ir meļi. Tā kā trešais apgalvo, ka viņam priekšā stāv melis, viņš saka patiesību - pretruna. Tātad pirmais ir melis. Otrā apgalvojums ir patiess, tātad tas ir patiesais; trešā- nepatiess, tātad trešais ir melis utt. Tā kā rindā kopā ir 21 cilvēks un pirmais, trešais, piektais, ..., divdesmitpirmais ir meļi, tad kopā ir 11 meļi.
6. Iespējamo plaknes daļu skaitu un piemērus skatīt zīmējumā (vertikālās taisnes ir paralēlas, līdzīgi arī horizontālās).



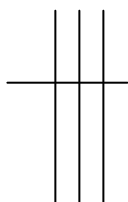
0 krustp.

5 daļas



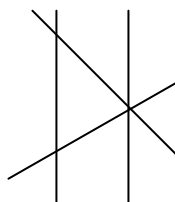
1 krustp.

8 daļas



3 krustp.

8 daļas



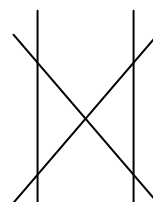
3 krustp.

9 daļas



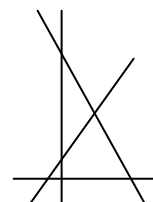
4 krustp.

9 daļas



5 krustp.

10 daļas

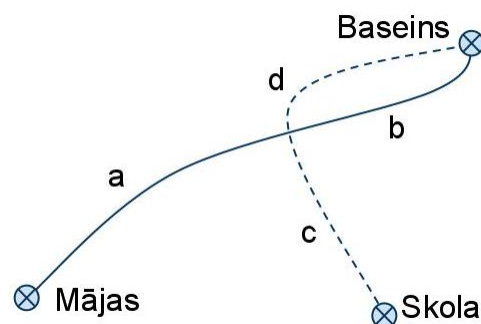


6 krustp.

11daļas

Skaidrs, ka daļu skaits, kādā mēs sadalīsim plakni, būs atkarīgs no tā, cik krustpunktus veidos dotās 4 taisnes. Tāpēc apskatīsim iespējamo krustpunktu skaitu. Vairāk par 6 krustpunktiem nav iespējams iegūt, jo katrā krustpunktu krusto vismaz divas taisnes, un 2 taisnes no 4 var izvēlēties $4 \cdot 3 / 2 = 6$ veidos. To, ka divi krustpunkti nav iespējami, var pierādīt, apskatot taisņu paralelītāti. Visas nevar būt paralēlas (0 krustp.). Ja trīs paralēlas, tad ceturrtā rada 3 krustpunktus. Ja divas paralēlas, tad viena no pārējām rada 2 krustpunktus ar tām un pēdējā nevar krustot tās tajos pašos punktos. Ja nav paralēlu taisņu, tad trīs no tām vai nu veido trīs krustpunktus (pretruna), vai arī vienu. Pēdējā gadījumā, velkot ceturto taisni, vai nu tā ies caur šo pašu punktu (kopā viens krustpunkts – pretruna), vai arī krustos visas pārējās (četri krustpunkti).

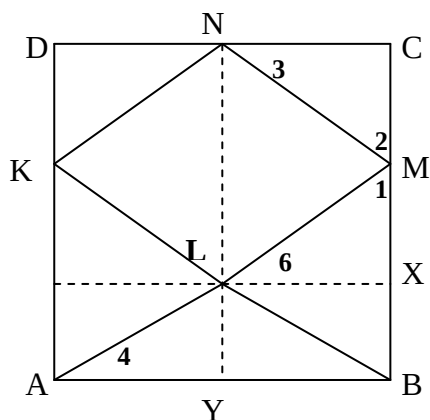
7. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar a, b, c, d . Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu b vai d . No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a + b \leq a + d$ un $c + d \leq c + b$. Tātad $b \leq d$ un $d \leq b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



8. Pieņemsim, ka bija k „vīrietis-sieviete” rokasspiedienu. Tad attiecīgi bija $105 - k$ sievietes, kas sarokojās savās starpā, un $95 - k$ vīriešu, kas sarokojās savās starpā. Tātad sieviešu, kas sarokojās savās starpā, bija par $(105 - k) - (95 - k) = 10$ vairāk kā vīriešu, kas sarokojās savā starpā. No šejienes secinām, ka „sieviete-sieviete” rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis” rokasspiedienu.
9. Invariantu metode. Sākotnējais skaitlis 2010 dalās ar 3. Arī skaits, par kuru katru minūti mainās konfekšu skaits, dalās ar 3. Tātad visi konfekšu skaiti, ko var iegūt, dalīsies ar 3. 1010 nedalās ar 3. Tātad konfekšu skaits kārbā nekad nevar būt 1010.
10. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.
11. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru $m \times n$. Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta $m \cdot n$ gabaliņos ar izmēru 1×1 . Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas $(m \cdot n - 1)$ laušanas. Ja $m \cdot n$ ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja $m \cdot n$ ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā

kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6 x 8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

12. Ievērosim, ka bumbiņas veiktais ceļš ir simetrisks attiecībā pret simetrijas asi uz taisnes NY, jo, sitot bumbiņu no stūra simetriski pretēja punktu B uz A, tā būtu jāsīt tādā pašā leņķī, kā no A uz B. (Īsāks risinājums, izmantojot trijstūru līdzību, ir atrodams atrisinājumā beigās.*)



Tādējādi NY daļa kvadrātu divās simetriski vienādās daļās un $AY = YB = 1\text{m}$, $NY \parallel CB$, kā arī $\angle AYN = \angle YBX$ (kā kāpšļleņķi). Tā kā sitiena leņķis ir vienāds ar bumbiņas atsietiena leņķi, tad $\angle 1 = \angle 2$.

$$\text{Savukārt } \left. \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle YBX = \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 \text{ un}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle 3 = \angle 4 \\ \angle AYN = \angle YBX = \angle C = 90^\circ \\ AY = 1\text{m} = NC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AYL = \triangle NCM \text{ (lml)}. \text{ Caur}$$

L novilksim taisni, kas paralēla AB, tad $\angle 4 = \angle 6$ (kā kāpšļleņķi) un $\angle X = \angle YBX = 90^\circ$ (arī kā kāpšļleņķi). Tādējādi, zinot, ka $NY \parallel CB$, var secināt, ka $LX = YB = 1\text{m}$ (kā attālumi starp paralēlām taisnēm). Iegūstam

$$\left. \begin{array}{l} \angle 4 + \angle 6 \\ \angle AYN = \angle X = 90^\circ \\ AY = 1\text{m} = LX \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AYL = \triangle LXM, \text{ kā arī } \triangle AYL = \triangle LXM = \triangle NCM \Rightarrow LY = MX =$$

$$CM = \frac{1}{3}CB \text{ (jo skaidrs, ka } LY + XM + CM = CB) = \frac{2}{3}\text{m un } AY = LX = NC = 1\text{m. Tādēļ}$$

$$AL = LM = MN = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}\text{m} \Rightarrow \text{ceļš } AMN = (AL + LM + MN) = \sqrt{13}\text{m. No}$$

simetrijas izriet, ka ceļš AMN vienāds ar NKY, no kā iegūstam, ka bumbiņas veiktais attālumus ir $2\sqrt{13}\text{m}$.

*Tiem, kuri zina, kas ir līdzīgi trijstūri, piedāvājam arī alternatīvu risinājumu.

$$\left. \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle ABC = \angle C = 90^\circ \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle NMC \text{ (3 leņķi)} \Rightarrow \frac{AM}{NM} = \frac{NC}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$AM = 2 \cdot NM = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}\text{m. Tātad ceļš } AMN = AM + NM = \sqrt{13}\text{m. Un līdzīgi}$$

kā pirmajā gadījumā, atsaucoties uz simetriju, varam secināt, ka kopējais bumbiņas veiktais attālums bija $2\sqrt{13}\text{m}$.

13. Noteikti var uzminēt ar 6 jautājumiem:

- 1) Vai sarkana kārts?
- 2) Jā: Vai ercens? Nē: Vai pīķis?

Esam noskaidrojuši mastu, atliek ar 4 jautājumiem noskaidrot kārts stiprumu. Sanumurēsim stiprumus ar skaitļiem 1-13.

3)	1-8?												
4)	Jā: 1-4?								Nē: 9-11?				
5)	Jā: 1-2?				Nē: 5-6?				Jā: 9?			Nē: 12?	
6)	Jā: 1?		Nē: 3?		Jā: 5?		Nē: 7?		9	Nē: 10?		12	13
	1	2	3	4	5	6	7	8		10	11		

Ar pieciem vai mazāk jautājumiem nav iespējams droši uzminēt iedomāto kārti: Iedomājamies līdzīgu tabulu augstāk dotajai. Pēc katras atbildes saņemšanas, mūsu tālākai rīcībai ir divi varianti (kas atbilst atbildēm „Jā” un „Nē”). Tas nozīmē, ka pēc 5 atbilžu saņemšanas ir 32 iespējamie rīcības varianti (katrs no kuriem ir konkrētas kārts nosaukšana, jo ir beigušies jautājumi). Līna varēja iedomāties jebkuru no 52 kārtīm, taču ar pieciem jautājumiem nav iespējams iegūt 52 dažādus iznākumus.

14. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

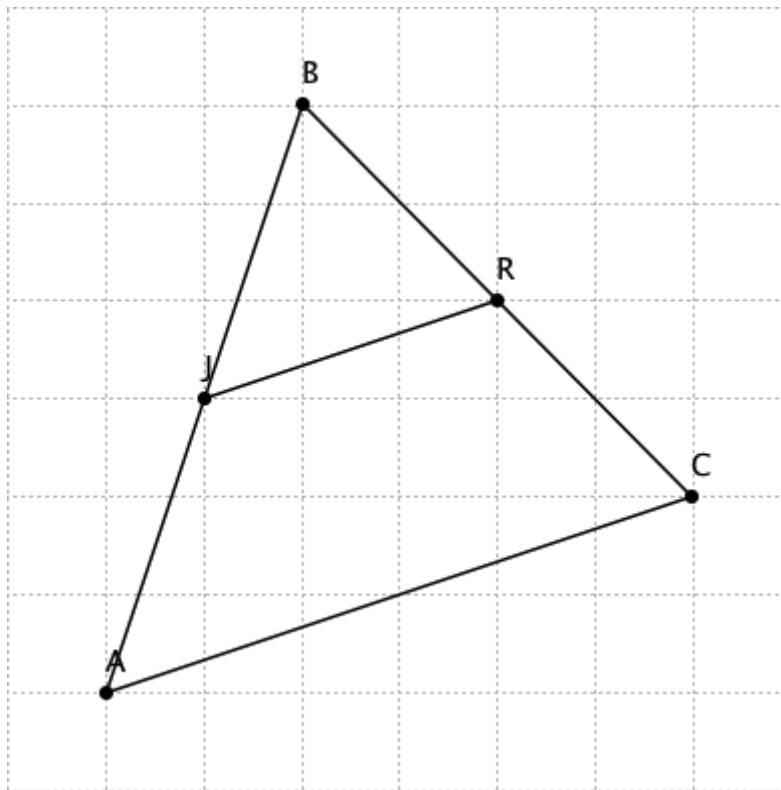
$x \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts $x \bmod 8$ apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā $x^2 \bmod 8$ ir atkarīgs tikai no $x \bmod 8$, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2 \bmod 8$ var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y , ka $(x^2 + 2y^2) \bmod 8$ ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.

Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc $\bmod 8$, nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).

a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. $AJ = JB$, $BR = RC$, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad $AC \parallel JR$ un $AC = 2JR$. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6, y - 2)$.



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:

I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,

II. A atrodas otrpus R no J,

III. A atrodas otrpus J no R

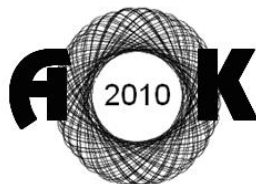
i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā $AC = 2JR$, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y) , bet otras - $(x + 6, y + 2)$, atrodam 3 pārus:

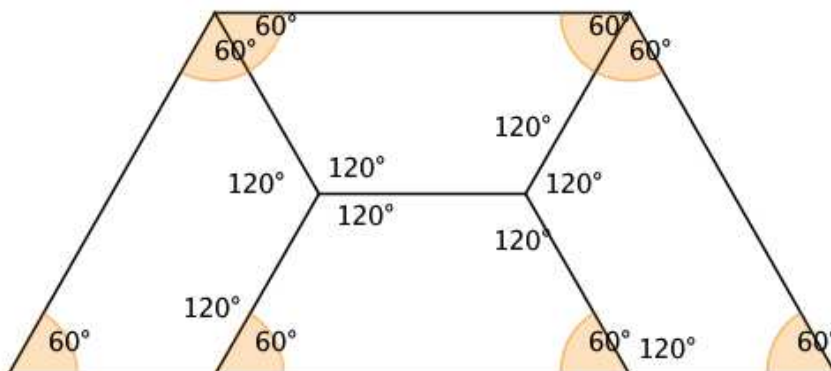
- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.



Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

10. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Trapece tiek dalīta 4 trapecēs, kurām sānu malas vienādas ar īsāko pamatu un šaurais leņķis ir 60° , kā arī tās visas ir vienādas savā starpā.



2. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.

Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana $OO=OO$ $OO<OO$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.

2. svēršana (1.gad) $O=O$ $O<O$

Atkal ir iespējami divi iznākumi:

a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;

b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.

Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.

2. svēršana (2.gad) $OO=OO$ $OO<OO$

1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.

2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.

1. un 2. svēršana $O=O$ $O=O$ $O=O$ $O<O$

Ir iespējami divi gadījumi:

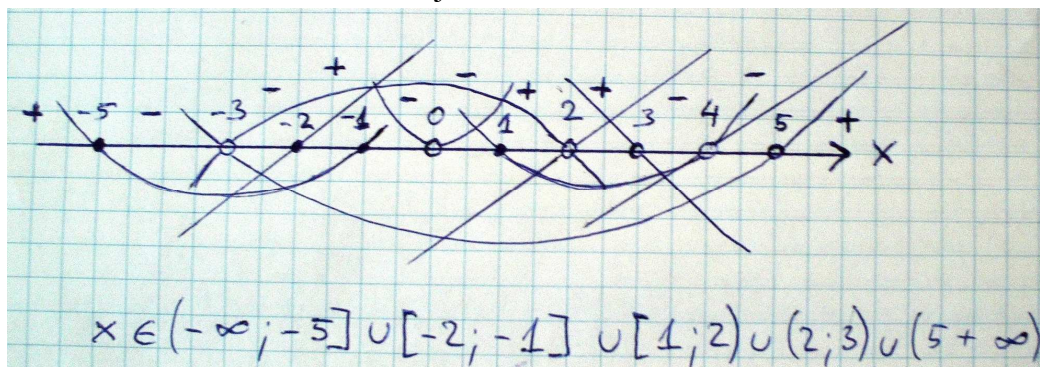
1) abās svēršanas reizēs svāri bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.

2) vienā no svēršanas reizēm svāri nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svāri ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svāriem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svāriem.

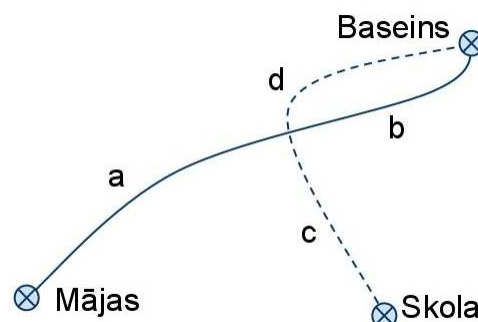
3. Atrodot kvadrātviēnādojumu saknes, mēs varam tos sadalīt reizinātājos un attiecīgi pārrakstīt sākotnējo nevienādību:

$$\frac{[(x+5)(x+1)](x+2)[(x-4)(x-1)]}{x^2(x-4)[(x+3)(2-x)][(x-5)(x+3)](x-2)(3-x)} \geq 0$$

Un tad attiecīgi, aplūkojot intervālus, kuros nevienādības kreisā puse ir pozitīva vai negatīva, mēs atradīsim nevienādības atrisinājumu:



4. Apzīmēsim ceļu posmu garumus ar a, b, c, d . Pieņemsim, ka citu ceļu nav. Nonācis krustojumā, Mindaugs var izvēlēties ceļu turpināt pa posmu b vai d . No Mindauga apgalvojuma secinām, ka $a+b \leq a+d$ un $c+d \leq c+b$. Tātad $b \leq d$ un $d \leq b$, jeb $b = d$. Tas nozīmē, ka Mindaugam var būt taisnība, ja ceļu posmi, kas ved no krustojuma līdz baseinam, ir vienāda garuma.



5. Pareizināsim abas nevienādības puses ar 2:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Tālāk mēs varam veikt sekojošos pārveidojumus:

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$

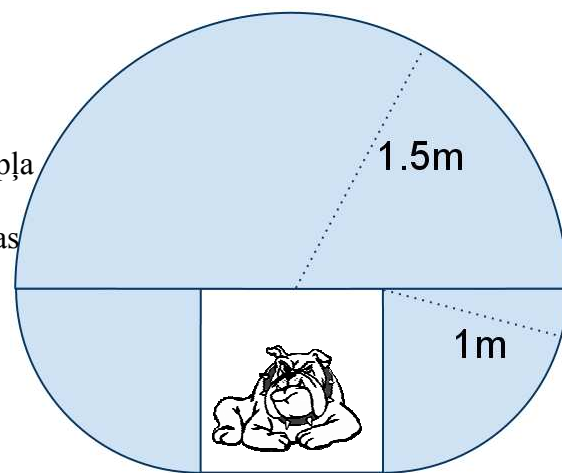
$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

Tā kā jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad arī iegūtā nevienādība būs spēkā visiem reāliem a, b, c .

6. Reksis var apsargāt teritoriju būdas priekšā, kas ir pusapļa formā ar rādiusu 1.5m, kā arī teritorijas būdas sānos, kas ir ceturtdaļļa formā ar rādiusu 1m (jo ķēde apliecas ap būdas stūri). Tātad izmantojot formulu $L = \pi r^2$, iegūstam

$$Laukums = \frac{1}{2} \pi 1.5^2 + \frac{2}{4} \pi 1^2 = \frac{13}{8} \pi$$

Atbilde: Reksis var apsargāt $\frac{13}{8} \pi$ m² lielu laukumu.



7. Bruņurupcis distanci veica 10 stundās. Zaķis un Bruņurupcis skrējieni sāka vienlaicīgi, un arī finišu šķērsoja vienlaicīgi (jo Zaķis skraidīja šurpu-turpu starp Bruņurupci un finišu, to nešķērsojot, kamēr neierodas Bruņurupcis). Tātad Zaķis skrēja 10 stundas ar ātrumu 20km/h, kopumā veicot 200km.
8. Vienkāršības labad var apskatīt skaitļa 7 pakāpes no 0. līdz 2010. pakāpei, tātad kopā 2011 skaitļus. Skaitli dalot ar 2010, tas var dot atlikumus no 0 līdz 2009, t.i., kopā 2010 dažādus atlikumus. Tādēļ pēc Dirihlē principa iegūstam, ka starp mūsu izvēlētajām 2011 skaitļa 7 pakāpēm, vismaz divas dos vienādus atlikumus, dalot ar 2010. Attiecīgi šo divu skaitļa 7 pakāpju starpība dalīsies ar 2010.

9. Skaidrs, ka $2(2a + 3b)$ dalās ar 7, tādēļ arī

$$2(2a + 3b) - (4a + 5b) \text{ dalās ar } 7$$

$$(4a - 4a + 6b - 5b) \text{ dalās ar } 7$$

$$b \text{ dalās ar } 7$$

Tā kā viens no $2a + 3b$ saskaitāmajiem, t.i., $3b$ dalās ar 7, tad, lai $2a + 3b$ dalītos ar 7, arī otram saskaitāmajam $2a$ jādalās ar 7. Tā kā skaitļiem 2 un 7 nav kopīgu dalītāju, tad a dalās ar 7.

10. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

$x \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts $x \bmod 8$ apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā $x^2 \bmod 8$ ir atkarīgs tikai no $x \bmod 8$, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2 \bmod 8$ var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y , ka $(x^2 + 2y^2) \bmod 8$ ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.

Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc $\bmod 8$, nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

11. Pieņemsim, ka kādā kolonnā vai rindiņā ir ieslēgtas i spuldzītes. Tad, nomainot šīs kolonnas/rindiņas spuldzīšu stāvokli, mēs ieslēgto spuldzīšu skaitu samazināsim par i , bet tajā pašā laikā palielināsim par $10 - i$, jo iepriekš neieslēgtās spuldzītes tiks ieslēgtas. Tātad katrā gājienā ieslēgto spuldzīšu skaitu palielināsim (vai samazināsim) par $-i + (10 - i) = 10$

– $2i$, t.i., izmainīsim par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji ieslēgta 1 spuldzīte (nepāra skaits), tad, mainot ieslēgto spuldziņu skaitu par pāra skaitli, nav iespējams panākt, ka ieslēgtas būs pāra skaits spuldziņu, tātad nevarēs ieslēgt arī tieši pusi jeb 50 no visām spuldzītēm.

12. Noteikti var uzminēt ar 6 jautājumiem:

- 1) Vai sarkana kārts?
- 2) Jā: Vai ercens? Nē: Vai pīķis?

Esam noskaidrojuši mastu, atliek ar 4 jautājumiem noskaidrot kārts stiprumu. Sanumurēsim stiprumus ar skaitļiem 1-13.

3)	1-8?												
4)	Jā: 1-4?								Nē: 9-11?				
5)	Jā: 1-2?				Nē: 5-6?				Jā: 9?			Nē: 12?	
6)	Jā: 1?		Nē: 3?		Jā: 5?		Nē: 7?		9	Nē: 10?		12	13
	1	2	3	4	5	6	7	8		10	11		

Ar pieciem vai mazāk jautājumiem nav iespējams droši uzminēt iedomāto kārti: Iedomājamies līdzīgu tabulu augstāk dotajai. Pēc katras atbildes saņemšanas, mūsu tālākai rīcībai ir divi varianti (kas atbilst atbildēm „Jā” un „Nē”). Tas nozīmē, ka pēc 5 atbilžu saņemšanas ir 32 iespējamie rīcības varianti (katrs no kuriem ir konkrētas kārts nosaukšana, jo ir beigušies jautājumi). Līna varēja iedomāties jebkuru no 52 kārtīm, taču ar pieciem jautājumiem nav iespējams iegūt 52 dažādus iznākumus.

13. Skaidrs, ka $99^{2010} < 100^{2010}$ un $2010^{1345} > 1000^{1345}$
Tātad, ja $100^{2010} < 1000^{1345}$, tad arī $99^{2010} < 2010^{1345}$

$$\begin{aligned}
 100^{2010} &= 10^{4020} \\
 1000^{1345} &= 10^{4035} \\
 10^{4020} &< 10^{4035} \\
 100^{2010} &< 1000^{1345} \\
 99^{2010} &< 2010^{1345} \\
 \text{K.b.j.}
 \end{aligned}$$

14. Apskatīsim visu uz tāfele uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Sākotnēji tas būs $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$. Ar katru gājienu, tas tiks samazināts 4 reizes. Tad, tā kā ar katru veikto gājienu uz tāfeles esošo skaitļu skaits samazinās par viens un sākumā bija 2^{2009} skaitļu, tikai veikti $2^{2009} - 1$ gājieni. Tādēļ skaidrs, ka $k = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{4^{2^{2009}-1}}$. Apskatīsim, cik daudz ir skaitļu 2 starp

reizinājuma $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$ pirmreizinātājiem. Tā kā visi skaitļi ir pāra, tad būs vismaz 2^{2009} divnieku. Tā kā tie ir viens otram sekojoši pāra skaitļi, tad katrs otrais skaitlis dalīsies ar 4, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$ divnieku, attiecīgi katrs ceturtais skaitlis dalīsies ar 8, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{4} = 2^{2007}$ divnieku ... katrs 2^{2009} -tais skaitlis dalīsies ar 2^{2009} , tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2^{2009}} = 1$ divnieks. Tādēļ reizinājumu $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$ mēs var izteikt kā $2^{2^{2009} + 2^{2008} + 2^{2007} + \dots + 1} \cdot M$, kur M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju

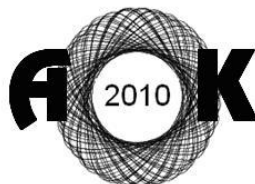
reizinājums. Zinot ģeometriskās progresijas summu, šajā reizinājumā mēs divnieka pakāpi

var pārrakstīt: $2^{\frac{2^{2010}-1}{2-1}} \cdot M$ jeb $2^{2^{2010}-1} \cdot M$.

Tātad $k = \frac{2^{2^{2010}-1} \cdot M}{4^{2^{2009}-1}} = \frac{2^{2^{2010}-1} \cdot M}{2^{2^{2010}-2}} = 2M$. Skaidrs, ka k ir naturāls pāra skaitlis.

Attiecīgi $k + 1 = 2M + 1$. Tā kā tas būs nepāra skaitlis, tam nebūs neviena pāra pirmreizinātāja. Turklāt, zinot, ka M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju reizinājums, skaitli $k + 1$, dalot ar jebkura sākotnējā skaitļa jebkuru nepāra pirmreizinātāju, atlikums būs 1. Tātad $k + 1$ nedalīsies ne ar vienu no sākotnējo skaitļu pirmreizinātājiem, t.i., būs savstarpējs pirmskaitlis ar jebkuru sākotnējās virknes skaitli.

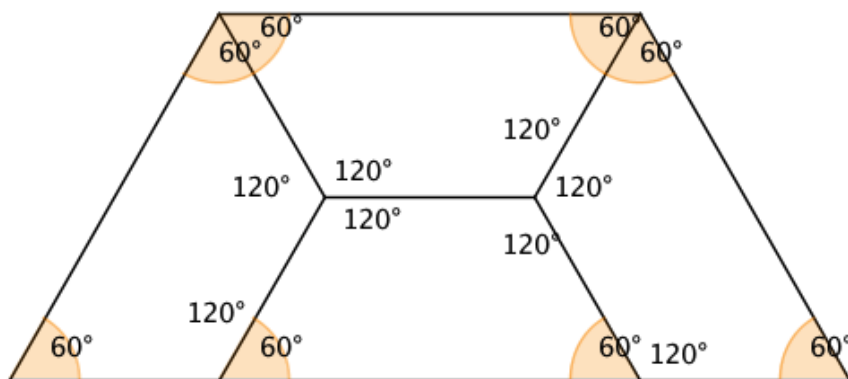
- 15.** Ļoti ticams skaidrojums varētu būt tas, ka Zolitūdes autobuss izbrauc minūti pēc Purvciema autobusa. Apskatīsim 10 minūšu intervālus starp katriem diviem Purvciema autobusi. Ja Marta ierodas pieturā pirmajās 9 no šīm 10 minūtēm, tad pirmais pienāks Zolitūdes autobuss. Tikai tad, ja Marta pieturā ierodas starp 9. un 10. minūti, pirmais autobuss būs Purvciema autobuss. Līdz ar to, tikai aptuveni 10% gadījumu Marta aizbrauks uz Purvciem.



Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

11. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Katrai komandai jāizspēlē 16 spēles ar savas konferences komandām un 9 spēles ar pārējo konferenču komandām, tātad katra no 27 komandām izspēlē 25 spēles. Ja summē visu komandu izspēlētās spēles, iegūst $27 \cdot 25$. Bet šis skaits vēl jāizdala ar 2, jo, kad komandas spēlē savā starpā, spēle tiek ieskaitīta gan pie vienas komandas izspēlēto spēļu skaita, gan pie otras komandas izspēlēto spēļu skaita. Tātad kopējo spēļu skaits būs $\frac{27 \cdot 25}{2} = 337.5$, bet tas nav iespējams, jo spēļu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim, tādēļ šāda čempionātā izspēles kārtība nav iespējama.
2. Ievērosim, ka skaitļi uz Edgara metamā kauliņa dod atlikumu 2, dalot ar 4, t.i., mēs tos varam uzrakstīt formā $4k+2$ (kur k – naturāls skaitlis). Uz Zanes kauliņa tad būs uzrakstīti skaitļi $(4k+2) \pm 1$, 2, 3 un attiecīgi, metot abus kauliņus, skaitļu summa uz tiem būs $(8k+4) \pm 1$, 2, 3 jeb $4(2k+2) \pm 1$, 2, 3. Acīmredzams, ka skaitļu summa nedalīsies ar 4, tātad tā nekad nebūs 24, jo tas dalās ar 4.
3. Invariantu metode. Sākotnējais skaitlis 2010 dalās ar 3. Arī skaits, par kuru katru minūti mainās konfekšu skaits, dalās ar 3. Tātad visi konfekšu skaiti, ko var iegūt, dalīsies ar 3. 1010 nedalās ar 3. Tātad konfekšu skaits kārbā nekad nevar būt 1010.
4. Trapece tiek dalīta 4 trapecēs, kurām sānu malas vienādas ar īsāko pamatu un šaurais leņķis ir 60° , kā arī tās visas ir vienādas savā starpā.



5. Pieņemsim pretējo, ka nekādi 4 Orbitreki nesēž blakus. Apskatīsim katras 4 blakus esošas sēdvietas. Kopā ir 23 šādi sēdvietu četrinieki – jebkura sēdvietā un 3 no tās pa kreisi esošās sēdvietas veido šādu četrinieku. Saskaņā ar sākotnējo nosacījumu, nevienā no šiem četriniekiem nesēž vairāk par 3 Orbitrekiem. Tad, tā kā katrs Orbitreks sēž 4 šādos četriniekos, maksimālais Orbitreku skaits, kas var sēdēt pie galda, ir $\leq \frac{23 \cdot 3}{4} = 17\frac{1}{4}$, t.i., 17 Orbitreki. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka sanāksmē piedalās un pie galda sēž 18 Orbitreki. Tātad katrā sapulcē būs tādi 4 Orbitreki, kas sēž viens otram blakus.

6. Lai atrastu atšķirīgo monētu ar 3 svēršanām, mēs varam izmantot šādus divus algoritmus:

Algoritms I

Par īstām sauksim tās 5 monētas, kura savās starpā ir vienādas arī pēc svara.

Sveram 2 monētas vienā pusē un 2 monētas otrā sviru svaru pusē.

1. svēršana $OO=OO$ $OO<OO$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) svari ir līdzsvarā – visas 4 svēršanā izmantotās monētas ir īstas;

Tagad izvēlamies vienu no 4 īstajām monētām un nosveram ar vienu no nenosvērtajām.

2. svēršana (1.gad) $O=O$ $O<O$

Atkal ir iespējami divi iznākumi:

a) abas monētas sver vienādi, tad mēs esam atraduši 5 īstās monētas un pēdējā nenosvērtā ir atšķirīgā;

b) svari nav līdzsvarā, tātad monēta, kuru mēs paņēmām no divām atlikušajām, ir arī atšķirīgā.

Šo metodi, kā ar vienu svēršanu atrast atšķirīgo monētu, ja ir zināmas vismaz 4 īstās monētas, sauksim par metodi A.

2) viena puse ir vieglāka – atšķirīgā monētā ir starp 4 nosvērtajām monētām, atlikušās 2 abas ir īstas.

2. svēršana (2.gad) $OO=OO$ $OO<OO$

1) Ja svari būs līdzsvarā, tad starp divām šajā svēršanas reizē nesvērtajām monētām būs atšķirīgā monēta, bet 4 nosvērtās monētas visas būs īstas. Tad, izmantojot metodi A, atradīsim atšķirīgo monētu.

2) Ja svari nebūs līdzsvarā, tad starp tām divām monētām, kuras svērām jau otro reizi, būs atšķirīgā (pārējās 4 būs īstas). 3. svēršanas reizē ar metodi A atradīsim atšķirīgo monētu.

Algoritms II

Sadalām dotās 6 monētas 3 pāros. Ar pirmajām divām svēršanas reizēm nosveram jebkurus 2 no šiem 3 pāriem.

1. un 2. svēršana $O=O$ $O=O$ $O=O$ $O<O$

Ir iespējami divi gadījumi:

1) abās svēršanas reizēs svari bija līdzsvarā. Tātad visas 4 svērtās monētas ir īstas, un atšķirīgā monēta ir viena no 3. pāri esošajām. 3. svēršanas reizē līdzīgi ar metodes A palīdzību spēsim atrast atšķirīgo monētu.

2) vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā. Priekš 3. svēršanas reizes tad izvēlamies vienu monētu no pāra, kurš nebija līdzsvarā, un vienu monētu no pāra, kurš bija līdzsvarā, (skaidrs, ka šī monēta būs īstā). Ja šoreiz svari ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika paņemta no līdzsvarā esošajiem svāriem. Savukārt, ja nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kura tika izvēlēta no nelīdzsvarotajiem svāriem.

7. Mēs varam veikt šādas 3 substitūcijas:

$$a + b = x$$

$$b + c = y$$

$$a + c = z$$

Attiecīgi mēs varam pārrakstīt doto nevienādību par $\frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} + \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2}$,

kuru varam turpināt pārveidot:

$$\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \geq 3$$

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 \geq 3$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6$$

Šī nevienādība būs spēkā, jo jebkuriem pozitīviem m un n izpildās nevienādība $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$,

kura savukārt būs patiesa, jo $\frac{m^2 + n^2}{mn} \geq 2$

(pareizinot abas puses ar mn , vienādība saglabājas, jo reizinām ar pozitīvu skaitli)

$$m^2 - 2mn + n^2 \geq 0$$

$$(m - n)^2 \geq 0,$$

un jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

8. Vienādības labo pusi dalot ar 8, atlikums ir 5. Tātad tas pats attiecas uz vienādības kreiso pusi. Kāds var būt atlikums, kvadrātu dalot ar 8? Apskatot kvadrātu atlikumus, dalot ar 8, iegūstam:

$x \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

(pieraksts $x \bmod 8$ apzīmē skaitļa x atlikumu, dalot ar 8) Tā kā $x^2 \bmod 8$ ir atkarīgs tikai no $x \bmod 8$, kurš savukārt var pieņemt tikai uzrakstītās 8 vērtības, iegūstam, ka kvadrāta atlikums, dalot ar 8 var būt tikai 0, 1 vai 4. Līdzīgi $2y^2 \bmod 8$ var būt tikai 0 vai 2. Nav iespējams izvēlēties tādus x un y , ka $(x^2 + 2y^2) \bmod 8$ ir vienāds ar 5. Tādēļ vienādība nav atrisināma veselos skaitļos.

Piebilde: Šis spriedums nestrādātu otrā virzienā – ja eksistētu atrisinājums pēc $\bmod 8$, nebūtu garantēts atrisinājums sākotnējai vienādībai.

9. Skaidrs, ka $99^{2010} < 100^{2010}$ un $2010^{1345} > 1000^{1345}$
Tātad, ja $100^{2010} < 1000^{1345}$, tad arī $99^{2010} < 2010^{1345}$

$$100^{2010} = 10^{4020}$$

$$1000^{1345} = 10^{4035}$$

$$10^{4020} < 10^{4035}$$

$$100^{2010} < 1000^{1345}$$

$$99^{2010} < 2010^{1345}$$

K.b.j.

10. Visupirms apskatīsim vispārīgo gadījumu ar šokolādes izmēru $m \times n$. Ievērosim, ka pēc katras laušanas kopējais gabaliņu skaits var palielināties tikai par 1. Skaidrs, ka spēles beigās šokolāde būs pilnībā salauzta $m \cdot n$ gabaliņos ar izmēru 1×1 . Tad, zinot, ka sākotnēji bija viens vesels šokolādes gabals, kopā būs notikušas $(m \cdot n - 1)$ laušanas. Ja $m \cdot n$ ir nepāra skaitlis, tad laušanu skaits būs pāra skaits, tātad pēdējo gājienu izdarīs tas, kurš būs veicis otro gājienu, t.i., Līga, un viņa tad arī uzvarēs. Savukārt, ja $m \cdot n$ ir pāra skaitlis, tad laušanu skaits būs nepāra skaits, un pēdējo, uzvarošo gājienu veiks tas, kurš uzsāka spēli - Jānis. Tā

kā a) gadījumā arī ir dota šokolāde ar pāra skaitu (6 x 8) gabaliņu, tad šajā gadījumā arī uzvarēs Jānis.

11. Jebkuru k skaitli $\underbrace{111 \dots 111}_k$ mēs varam izteikt, kā $1 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^k$, kas ir ģeometriskā progresija ar progresijas koeficientu 10. Tādēļ pēc ģeometriskā progresijas locekļu summas formulas $\underbrace{111 \dots 111}_k = \frac{(10^{k+1} - 1)}{(10 - 1)}$. Sākotnējo summu mēs varam pārrakstīt kā

$$\frac{(10^1 - 1)}{(10 - 1)} + \frac{(10^2 - 1)}{(10 - 1)} + \dots + \frac{(10^{n+1} - 1)}{(10 - 1)}$$

$$\frac{(10 \cdot (10^0 + 10^1 + \dots + 10^n) - n)}{9},$$

Un, vēlreiz pielietojot ģeometriskās progresijas locekļu summas formulu, mēs iegūtam meklēto funkciju $f(n) = \frac{(10 \cdot (10^n - 1) - n)}{9}$.

12. Apskatīsim visu uz tāfele uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Sākotnēji tas būs $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$. Ar katru gājienu, tas tiks samazināts 4 reizes. Tad, tā kā ar katru veikto gājienu uz tāfeles esošo skaitļu skaits samazinās par viens un sākumā bija 2^{2009} skaitļu, tikai veikti $2^{2009} - 1$ gājieni. Tādēļ skaidrs, ka $k = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{4^{2^{2009}-1}}$. Apskatīsim, cik daudz ir skaitļu 2 starp reizinājuma $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$ pirmreizinātājiem. Tā kā visi skaitļi ir pāra, tad būs vismaz 2^{2009} divnieku. Tā kā tie ir viens otram sekojoši pāra skaitļi, tad katrs otrais skaitlis dalīsies ar 4, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$ divnieku, attiecīgi katrs ceturtais skaitlis dalīsies ar 8, tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{4} = 2^{2007}$ divnieku ... katrs 2^{2009} -tais skaitlis dalīsies ar 2^{2009} , tātad būs vēl papildu $\frac{2^{2009}}{2^{2009}} = 1$ divnieks. Tādēļ reizinājumu $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2^{2010}$ mēs var izteikt kā $2^{2^{2009} + 2^{2008} + 2^{2007} + \dots + 1} \cdot M$, kur M ir visu sākotnējo skaitļu visu nepāra pirmreizinātāju reizinājums. Zinot ģeometriskās progresijas summu, šajā reizinājumā mēs divnieka pakāpi var pārrakstīt: $2^{\frac{2^{2010}-1}{2-1}} \cdot M$ jeb $2^{2^{2010}-1} \cdot M$.

13. Doto vienādību mēs varam apskatīt kā kvadrātvienādojumu, kuram mainīgais ir a:

$$a^2 - \sqrt{4x+1} \cdot a - x^2 = 0$$

Varam aprēķināt diskriminantu $D = (-\sqrt{4x+1})^2 + 4x^2 = 4x+1+4x^2 = (2x+1)^2$. No šejienes var izteikt a kā funkciju no x: $a = f(x) = \frac{\sqrt{4x+1} \pm |2x+1|}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \pm \left|x + \frac{1}{2}\right|$.

Lai reālos skaitļus atrisinātu vienādojumu $x^2 + 3\sqrt{4x+1} - 9 = 0$, mēs var izmantot iepriekš iegūto funkciju un, ievietojot $a = 3$, iegūsim šādu vienādojumu:

$$3 = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \pm \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

Tā kā mums tāpat jāapskata abi + un - gadījumi, varam atņemt moduli:

$$3 = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \pm \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

Vispirms apskatīsim gadījumu $-\left(x + \frac{1}{2} \right)$:

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Ja $x \geq -\frac{7}{2}$ un $x \geq -\frac{1}{4}$, tad varam kāpināt abas puses kvadrātā un iegūstam

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = x + \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 6x + 12 = 0$$

Acīmredzami, ka diskrimināts būs negatīvs $D = 36 - 48 = -12$, tātad atrisinājums šajā gadījumā neeksistē.

Tagad apskatīsim gadījumu $+\left(x + \frac{1}{2} \right)$:

$$-x + \frac{5}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Ja $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{2}$, tad varam kāpināt abas puses kvadrātā

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

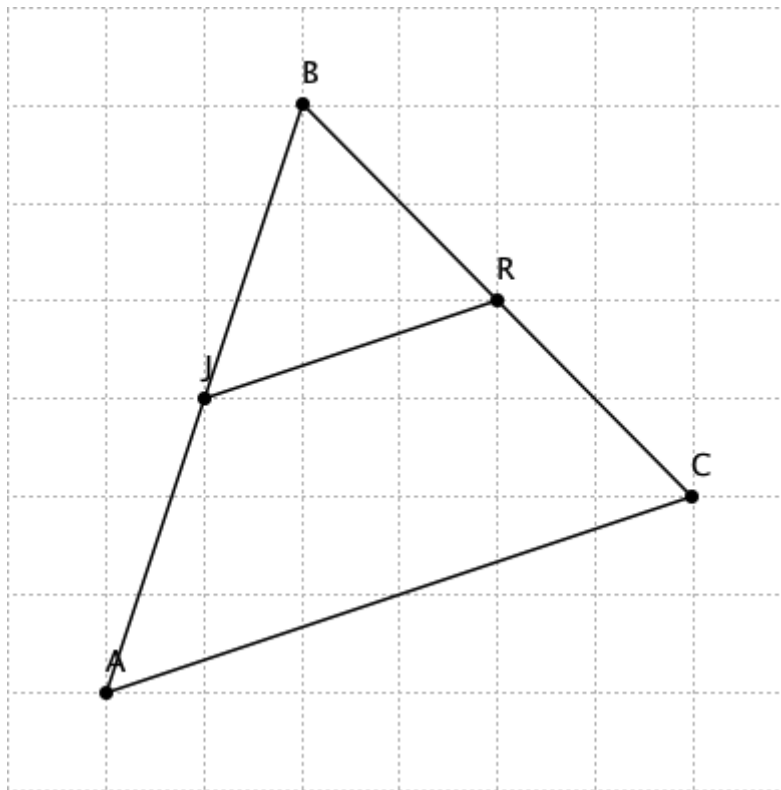
Tad kvadrātvienādojumu saknes būs $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$. Sakne $3 + \sqrt{3} > 3$ nederēs, jo

citādi neizpildās nosacījums $x \leq \frac{5}{2}$ (savukārt $3 - \sqrt{3} < 2$). Tātad vienādojuma vienīgais

atrisinājums ir $3 - \sqrt{3}$.

14. Ļoti ticams skaidrojums varētu būt tas, ka Zolitūdes autobuss izbrauc minūti pēc Purvciema autobusa. Apskatīsim 10 minūšu intervālus starp katriem diviem Purvciema autobusi. Ja Marta ierodas pieturā pirmajās 9 no šīm 10 minūtēm, tad pirmais pienāks Zolitūdes autobuss. Tikai tad, ja Marta pieturā ierodas starp 9. un 10. minūti, pirmais autobuss būs Purvciema autobuss. Līdz ar to, tikai aptuveni 10% gadījumu Marta aizbrauks uz Purvciem.

15. R - Rīga, J - Jūrmala. Pieņemsim, ka iDžejs sāk ceļu no punkta A, izmanto Jūrmalas teleportu vispirms, tad Rīgas (otru gadījumu pierāda līdzīgi).
a) A - brīvi izvēlēts punkts, kas nepieder taisnei JR. AJ = JB, BR = RC, tātad - JR - trijstūra ABC viduslīnija, tātad AC || JR un AC = 2JR. Tātad iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu (x + 6, y + 2) vai (x - 6; y - 2).



b) Atsevišķi jāapskata vairāki gadījumi, kad A pieder taisnei JR:

I. A pieder nogrieznim JR, t.sk. galapunktos,

II. A atrodas otrpus R no J,

III. A atrodas otrpus J no R

i. ne lielākā attālumā kā JR,

i. lielākā attālumā kā JR.

Arī šajā gadījumā $AC = 2JR$, turklāt pārvietoties var tikai pa taisni JR. Tātad arī šajā gadījumā iDžejs no koordinātas (x, y) var pārvietoties tikai uz koordinātu $(x + 6, y + 2)$ vai $(x - 6; y - 2)$.

Izpētot pilsētas, kur vienas pilsētas koordināta ir (x, y) , bet otras - $(x + 6, y + 2)$, atrodam 3 pārus:

- Rīga un Cēsis,
- Jēkabpils un Rēzekne,
- Jelgava un Ogre.