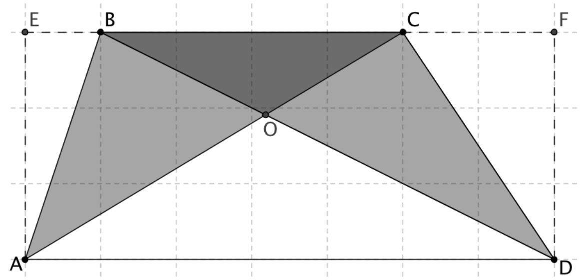
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

10. klases atrisinājumi



1. Apskatām variantu, kad AD, BC – pamati. Novelk perpendikulus AE un DF pret taisni BC.

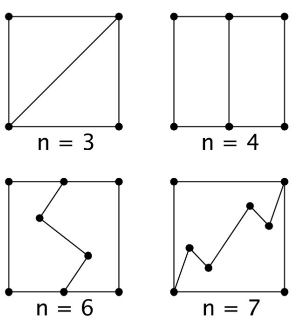
$AE = DF = h$ (taisnstūra pretējās malas)

$S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h=S(DBC)$

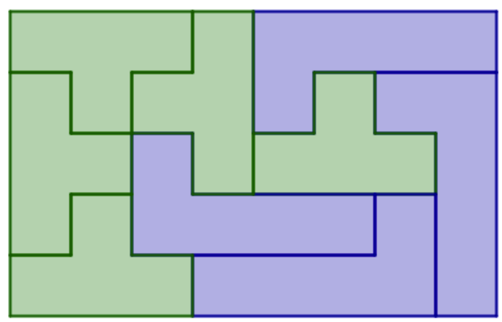
$S(ABC)-S(BOC)=S(DBC)-S(BOC)$

$S(ABO)=S(DCO)$

Gadījumā, ja trapeces pamati ir AB un CD, prasītie trijstūri nav vienādi.



Zīmējums 1



Zīmējums 2

2. Skat. zīmējumu Nr. 1.

3. Skat. zīmējumu Nr. 2.

4. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A=\frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B=\frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B}=\frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C}=\frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B}\cdot\frac{V_B}{V_C}=\frac{V_A}{V_C}=\frac{1000\cdot 1000}{800\cdot 700}=\frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdī t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

5. Ja $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n dalītāji sakārtoti augošā secībā, tad

$d_1=\frac{n}{d_k}, d_2=\frac{n}{d_{k-1}}, \ldots, d_k=\frac{n}{d_1}$. Tātad dotais vienādojums ir spēkā visiem n.

6. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2=q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q. Iegūstam:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p=1$ (līdz ar to $q=q$), vai $q=0$ ($p\cdot 0=0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

7. $2abc \overset{?}{>} a^3-ab^2-ac^2 \,|:a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)

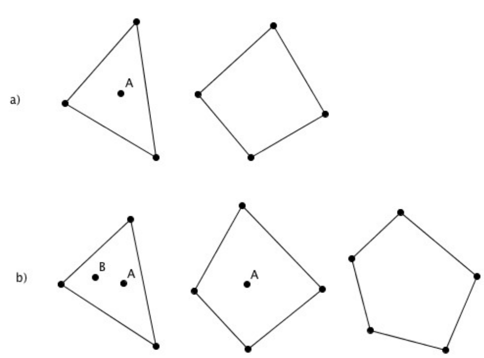
$2bc \overset{?}{>} a^2-b^2-c^2$

$b^2+2bc+c^2 \overset{?}{>} a^2$

$(b+c)^2 \overset{?}{>} a^2$

$b+c \overset{?}{>} a$ (pēc trijstūra nevienādības)

8. Savienojam punktus tā, lai izveidotu lielāko iespējamo daudzstūri (iespējamie izkārtojumi redzami zīmējumā).



a) 1. gadījumā veidojas trīs leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas (jebkura šo leņķu summa būs lielāka par leņķiem, kas to veido). Mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi trīs leņķi ir vienādi, tātad 120°. Trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir vienādmalu trijstūra gadījumā, tātad 60°. Taču katru no šiem leņķiem dala stars, kas iet no virsotnes caur punktu A. Tātad 1. gadījumā mazāka leņķa maksimālā vērtība ir 30°. Otrajā gadījumā četrstūra mazākā leņka maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četrstūra leņķi ir vienādi, t.i. 90°. Katru no tiem dala stars, kas iet no virsotnes uz pretēju virsotni, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība 2. gadījumā ir 45°. Tātad a piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 45°.

b) 1. gadījumā ir četri leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas, un četri – ar virsotni punktā B. To mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četri leņķi ir vienādi, tātad 90°. Tāpat arī otrajā gadījumā.

1. gadījumā trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 60°, taču to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 20°. 2. gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 90°, taču arī to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 30°. 3. gadījumā piecstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108°, to dala divi stari, tātad b piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108° : 3 = 36°.

9. Pirmkārt, redzam, ka 2., 3. un 4. skolēnam kopā ir 4 punkti un starp iekrāsotajām atbildēm a) arī ir 4 punkti, tātad 5., 6. un 7. jautājumā pareizās atbildes ir attiecīgi a, c un b. Tālāk skatāmies tabulu ar tikai pirmajiem 4 jautājumiem b). Šajā tabulā redzam, ka 4., 5. un 8. skolēniem kopā ir 6 punkti, turklāt 3. jautājumā ir kopā ir 1 punkts un 2. jautājumā – 0, 1 vai 2 punkti, savukārt 1. un 4. - 0 vai 3 punkti. Vienīgais variants, lai kopā sanāktu 6 punkti, ir, ja 2. jautājumā ir 2 punkti, tātad pareizā atbilde ir c. Iegūstam c) tabulu, kur redzams, ka no atlikušajiem jautājumiem jāiegūst 9 punkti. d) tabulā norādīts punktu skaits, kāds būtu katrā jautājumā, ja atbilstošā atbilde būtu pareiza. Šo punktu summai jābūt vienādai ar 9. Šiem kritērijiem atbilst varianti aba, abc, bba, bbc un ccb. Pēc izslēgšanas metodes (piemēram, aba un bba neder, jo tad 1. skolēnam būtu 2 punkti) atrodam vienīgo pareizo variantu – abc. Tātad pareizās atbildes pēc kārtas ir **a, c, b, c, a, c, b**.

a)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes							P
	1	2	3	4	5	6	7	
1	c	b	b	a	c	c	c	2
2	b	a	b	a	b	b	c	1
3	c	b	c	c	b	b	c	1
4	a	c	a	b	c	a	a	2
5	a	b	b	b	c	c	c	3
6	b	a	b	b	a	c	b	4
7	b	b	c	c	a	b	c	2
8	a	c	c	b	a	c	a	4

b)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes				P
	1	2	3	4	
1	c	b	b	a	1
2	b	a	b	a	1
3	c	b	c	c	1
4	a	c	a	b	2
5	a	b	b	b	2
6	b	a	b	b	1
7	b	b	c	c	1
8	a	c	c	b	2

c)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes			P
	1	3	4	
1	c	b	a	1
2	b	b	a	1
3	c	c	c	1
4	a	a	b	1
5	a	b	b	2
6	b	b	b	1
7	b	c	c	1
8	a	c	b	1

d)

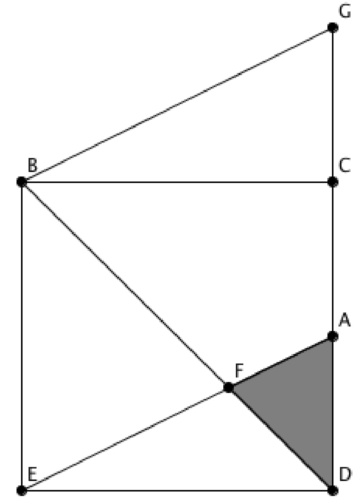
	1	**3**	**4**
a	3	1	2
b	3	4	4
c	2	3	2

10. Varam izteikt c kā $k \cdot m$. Tad doto virkni varam sadalīt šādās k daļās (katrā daļā ir m locekļi):

$$\underbrace{b, 2\mathrm{b}, \dots, bm}_{\text{1. daļa}} \underbrace{b(m+1), b(m+2), \dots, 2\mathrm{m}}_{\text{2. daļa}} \dots \underbrace{b((k-1)m+1), b((k-1)m+2), \dots, bkm}_{\text{k-tā daļa}} .$$

Uzrādīsim, ka šim dalījumam ir spēkā prasītie nosacījumi. Katra no daļām veido aritmētisko progresiju, tādēļ vispārīgi katras daļas locekļu summu mēs varam izteikt kā $b \cdot m \cdot i + \frac{b \cdot m(m+1)}{2}$ (kur i = 0, 1, 2, ...(k-1)). Attiecīgi jebkuru divu daļu locekļu starpību var izteikt kā $b \cdot m \cdot i$. Izsakot b kā $k \cdot z$, iegūstam $k \cdot z \cdot m \cdot i = z \cdot c \cdot i$. Tātad katras daļas locekļu summu starpība dalās ar c un, tā kā nekādu divu daļu locekļu summas nav vienādas, tad to starpības nebūs nulle.

11. Novelk $BG \| EA$.



$$\left.\begin{array}{r} BG \| FA \\ DG\ un\ DA\ uz\ vienas\ taisnes \\ DF\ un\ DB\ uz\ vienas\ taisnes \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, DFA \sim \Delta\, DBG$$

$$\Delta\, BGC = \Delta\, EAD \Rightarrow GC = AD = DG = 3\mathrm{AD} \Rightarrow k = \frac{AD}{DG} = \frac{1}{3}$$

$$S(DBG) = S(DBC) + S(BCG) = S(DBC) + S(EAD)$$

$$S(DBG) = S\frac{(BCDE)}{2} + S\frac{(BCDE)}{2} = \frac{3S(BCDE)}{4}$$

$$S(DFA) = k^2 \cdot s(DBG) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3S(BCDE)}{4} = S\frac{(BCDE)}{12}$$

12. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdī atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar p, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti p-1 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā p-2 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa p atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar p. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar p un tam nav neviena kopīga dalītāja ar p, jo p ir pirmskaitlis, tad $(x-y)$ dalās ar p, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar p. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par p, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

13. Veicam algebriskus pārveidojumus

$$(a+b+c)(d+e+f) < 3(ad+be+cf)$$

$$ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf < 3\mathrm{ad}+3\mathrm{be}+3\mathrm{cf}$$

$$2\mathrm{ad}+2\mathrm{be}+2\mathrm{cf} - ae - af - bd - bf - cd - cf > 0$$

$$(ad-bd-ae+be)+(be-ce-bf+cf)+(ad-cd-af+cf) > 0$$

$$(a-b)(d-e)+(b-c)(e-f)+(a-c)(d-f) > 0$$

Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo

$(a-b)(d-e)>0$ (no dotā $a>b, d>e$ un $a-b>0, d-e>0$)

$(b-c)(e-f)>0$ (no dotā $b>c, e>f$ un $b-c>0, e-f>0$)

$(a-c)(d-f)>0$ (no dotā $a>c, d>f$ un $a-c>0, d-f>0$).

14. Pēc katras spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanas reizes spuldzītes un slēdžus var sadalīt divās daļās – spuldzītēs, kuras netika ieslēgtas, un slēdžos, kuriem netika nomainīts stāvoklis, t.i., tie, kuri varētu ieslēgt neieslēgtās spuldzītes, un spuldzītēs, kuras tika ieslēgtas un slēdžos, kuriem tika nomainīts stāvoklis. Savukārt, nākamajā spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanās reizē katru no divām esošajām grupām, balstoties uz tajās ieslēgtajiem slēdžiem un iedegtajām spuldzītēm, varēsim sadalīt vēl divās grupās (tā kā slēdžiem un spuldzītēm var būt tikai 2 stāvokļi ieslēgts/izslēgts, tad katru no jau esošajām grupām varēsim sadalīt ne vairāk kā 2 citās grupās). Pēc k gājieniem dotās spuldzītēs būs sadalītas 2^k grupās. Skaidrs, ka brīdī, katrā grupā būs pa vienai spuldzītei, mēs visām spuldzītēm zināsim, kurš slēdzis tās ieslēdz. Tādēļ, lai pēc k gājieniem mēs zinātu, kuru spuldzīti ieslēdz, kurš slēdzis, jābūt spēkā sekojošai nevienādībai $\frac{2^n}{2^k} \leq 1$, tātad $2^n \leq 2^k$ un $k \geq n$. Tātad minimālais nepieciešamais telpas apmeklējumu reižu skaits ir n (par to, ka ar n reizēm pietiek, varam pārliecināties pēc katras apmeklējuma reizes, dalot spuldzītes kā aprakstīts uzdevumā).

15. Ar S_i apzīmēsim naudas daudzumu, par kādu i-tajā gadā tiek veikta aizņēmuma pamatsummas atmaksa (i = 1, 2, 3 ... 10). Tad $S_i = 12950 - 0{,}05 \cdot K_i$, kur K_i ir i-tajā gadā atlikusī aizņēmuma daļa, un $S_{i+1} = 12950 - 0{,}05 \cdot (K_i - S_i)$. Varam pārliecināties, ka $S_{i+1} = 1{,}05 \cdot S_i$. Tātad skaitļi S_i veido ģeometrisko progresiju: $S_1, S_2 = S_1 \cdot 1{,}05, S_3 = S_1 \cdot 1{,}05^2, \ldots, S_{10} = S_1 \cdot 1{,}05^9$. Tā kā pēc 10 gadiem jāatmaksā viss aizņēmums, tad maksimālais naudas apjoms P, ko Orbitreks varēs aizņemties, būs vienāds ar skaitļu S_i (katra gada atmaksāto daudzumu) summu.

$$P = S_1 + S_1 \cdot 1{,}05 + S_1 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + S_1 \cdot 1{,}05^9 = S_1 \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} = (12950 - 0{,}05 \cdot P) \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}.$$

Pārveidojot iegūto vienādību, iegūstam

$$P + 0{,}05P \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} = 12950 \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}$$

$$P\left(1 + \frac{0{,}05 \cdot (1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}\right) = 12950 \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)}$$

$$P(-0{,}05 + 0{,}05 \cdot (1-1{,}05^{10})) = 12950 \cdot (1-1{,}05^{10})$$

$$P(-0{,}05 \cdot 1{,}05^{10}) = 12950 \cdot (1-1{,}05^{10})$$

$$P = -\frac{12950 \cdot (1-1{,}05^{10})}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{10}}$$

Varam aprēķināt, ka P ≈ 99990.