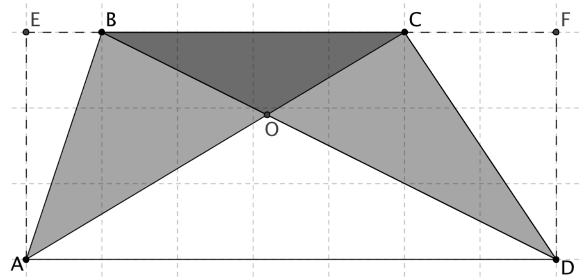
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

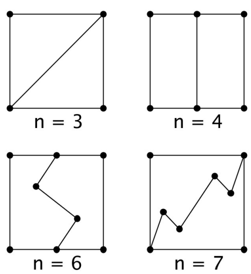
11. klases atrisinājumi



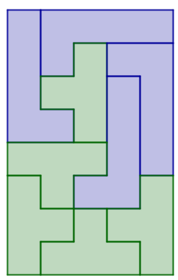
1. Apskatām variantu, kad AD, BC – pamati. Novelk perpendikulus AE un DF pret taisni BC.

$$AE = DF = h \text{ (taisnstūra pretējās malas)}$$
$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = S(DBC)$$
$$S(ABC) - S(BOC) = S(DBC) - S(BOC)$$
$$S(ABO) = S(DCO)$$

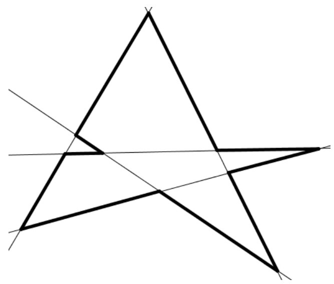
Gadījumā, ja trapeces pamati ir AB un CD, prasītie trijstūri nav vienādi.



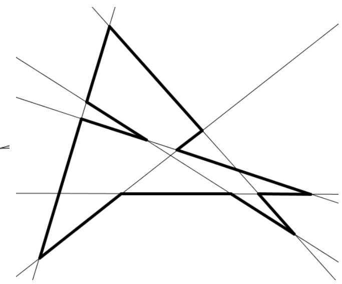
Zīmējums 1



Zīmējums 2



Zīmējums 3



Zīmējums 4

2. Skat. zīmējumu Nr. 1.

3. Skat. zīmējumu Nr. 2.

4. a) Skat. zīmējumu Nr. 3, b) skat. zīmējumu Nr. 4.

5. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

6. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2=q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q. Iegūstam:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p=1$ (līdz ar to $q=q$), vai $q=0$ ($p\cdot 0=0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

7. $2\text{abc} \overset{?}{>} a^3-ab^2-ac^2 \,|: a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)

$2\text{bc} \overset{?}{>} a^2-b^2-c^2$

$b^2+2\text{bc}+c^2 \overset{?}{>} a^2$

$(b+c)^2 \overset{?}{>} a^2$

$b+c \overset{?}{>} a$ (pēc trijstūra nevienādības)

8. Pēc grafika viegli noteikt $f(x)=0$ saknes. Tās ir $x_1=-4, x_2=-2, x_3=0{,}5, x_4=2$. To zinot, varam uzrakstīt funkciju formā $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=a(x+4)(x+2)(x-0{,}5)(x-2)$. Lai atrastu a vērtību, varam noteikt $f(0)$. No grafika varam nolasīt, ka $f(0)=16$. Aprēķinot $f(0)=a\cdot 4\cdot 2\cdot(-0{,}5)\cdot(-2)=a\cdot 8$. Līdz ar to $a=2$ un $f(x)=2(x+4)(x+2)(x-0{,}5)(x-2)=(x+4)(x+2)(2\text{x}-1)(x-2)$.

9. Novelk $BG \| EA$.

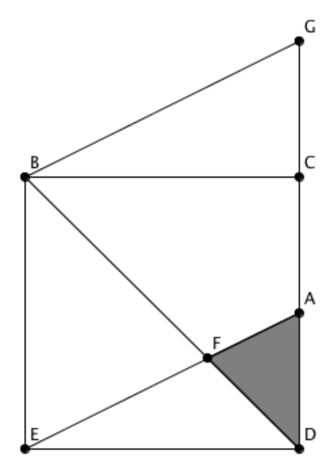
$$\left.\begin{array}{r} BG \| FA \\ DG\ un\ DA\ uz\ vienas\ taisnes \\ DF\ un\ DB\ uz\ vienas\ taisnes \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, DFA \sim \Delta\, DBG$$

$$\Delta\, BGC=\Delta\, EAD \Rightarrow GC=AD=DG=3\text{AD} \Rightarrow k=\frac{AD}{DG}=\frac{1}{3}$$

$$S(DBG)=S(DBC)+S(BCG)=S(DBC)+S(EAD)$$

$$S(DBG)=S\frac{(BCDE)}{2}+S\frac{(BCDE)}{2}=\frac{3S(BCDE)}{4}$$

$$S(DFA)=k^2\cdot s(DBG)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3S(BCDE)}{4}=S\frac{(BCDE)}{12}$$



10. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \le 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

11. Varam izteikt c kā $k \cdot m$. Tad doto virkni varam sadalīt šādās k daļās (katrā daļā ir m locekļi):

$$\underbrace{b, 2\mathrm{b}, \ldots, bm}_{\text{1. daļa}}\ \underbrace{b(m+1), b(m+2), \ldots, 2\mathrm{m}}_{\text{2. daļa}} \ldots \underbrace{b((k-1)m+1), b((k-1)m+2), \ldots, bkm}_{\text{k-tā daļa}}.$$

Uzrādīsim, ka šim dalījumam ir spēkā prasītie nosacījumi. Katra no daļām veido aritmētisko progresiju, tādēļ vispārīgi katras daļas locekļu summu mēs varam izteikt kā $b \cdot m \cdot i + \frac{b \cdot m(m+1)}{2}$ (kur i = 0, 1, 2, ...(k-1)). Attiecīgi jebkuru divu daļu locekļu starpību var izteikt kā $b \cdot m \cdot i$. Izsakot b kā $k \cdot z$, iegūstam $k \cdot z \cdot m \cdot i = z \cdot c \cdot i$. Tātad katras daļas locekļu summu starpība dalās ar c un, tā kā nekādu divu daļu locekļu summas nav vienādas, tad to starpības nebūs nulle.

12. Veicam algebriskus pārveidojumus

$$(a+b+c)(d+e+f) < 3(ad+be+cf)$$
$$ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf < 3\mathrm{ad}+3\mathrm{be}+3\mathrm{cf}$$
$$2\mathrm{ad}+2\mathrm{be}+2\mathrm{cf}-ae-af-bd-bf-cd-cf > 0$$
$$(ad-bd-ae+be)+(be-ce-bf+cf)+(ad-cd-af+cf) > 0$$
$$(a-b)(d-e)+(b-c)(e-f)+(a-c)(d-f) > 0$$

Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo

$(a-b)(d-e)>0$ (no dotā $a>b, d>e$ un $a-b>0, d-e>0$)

$(b-c)(e-f)>0$ (no dotā $b>c, e>f$ un $b-c>0, e-f>0$)

$(a-c)(d-f)>0$ (no dotā $a>c, d>f$ un $a-c>0, d-f>0$).

13. Apskatām vienā rindiņā uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Apzīmēsim skaitli kreisajā stabiņā ar m.

a) Ja stabiņa labajā pusē ir pāra skaitlis (2n), tad nākamajā rindiņā skaitļu reizinājums nemainās – $m \cdot 2\mathrm{n} \rightarrow 2\mathrm{m} \cdot n$.

b) Ja stabiņa labajā pusē ir nepāra skaitlis (2n + 1), tad nākamajā rindiņā abu skaitļu reizinājums ir par m mazāks – $m \cdot (2n+1) \rightarrow 2\mathrm{m} \cdot n$.

Kad pēc algoritma esam nonākuši pie rindiņas, kurā kreisajā pusē ir skaitlis m, bet labajā – 1, vēlreiz veicam dalīšanu un reizināšanu ar 2. Iegūsim vēl vienu rindiņu ar skaitļiem 2m un 0. Šo skaitļu reizinājums ir vienāds ar 0.

Salīdzinot ar pirmo rindiņu, pēdējās rindiņas (tās, kurā labajā pusē ir 0) reizinājums ir samazinājies tieši par abu sākotnējo skaitļu reizinājumu. Tā kā skaitļu reizinājums no vienas rindiņas uz nākamo samazinās tikai gadījumos, kad labajā pusē ir nepāra skaitlis, turklāt tas samazinās par kreisajā pusē uzrakstīto skaitli ($m\cdot(2n+1)-2n\cdot n=m$), tad saskaitot visus kreisās puses skaitļus rindiņās, kurās labajā pusē ir nepāra skaitlis, iegūsim pirmās un pēdējās rindiņas skaitļu reizinājumu starpību – abu sākotnējo skaitļu reizinājumu.

14. Pēc katras spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanas reizes spuldzītes un slēdžus var sadalīt divās daļās – spuldzītēs, kuras netika ieslēgtas, un slēdžos, kuriem netika nomainīts stāvoklis, t.i., tie, kuri varētu ieslēgt neieslēgtās spuldzītes, un spuldzītēs, kuras tika ieslēgtas un slēdžos, kuriem tika nomainīts stāvoklis. Savukārt, nākamajā spuldzīšu slēgšanas un telpas apskatīšanās reizē katru no divām esošajām grupām, balstoties uz tajās ieslēgtajiem slēdžiem un iedegtajām spuldzītēm, varēsim sadalīt vēl divās grupās (tā kā slēdžiem un spuldzītēm var būt tikai 2 stāvokļi ieslēgts/izslēgts, tad katru no jau esošajām grupām varēsim sadalīt ne vairāk kā 2 citās grupās). Pēc k gājieniem dotās spuldzītēs būs sadalītas 2^k grupās. Skaidrs, ka brīdī, katrā grupā būs pa vienai spuldzītei, mēs visām spuldzītēm zināsim, kurš slēdzis tās ieslēdz. Tādēļ, lai pēc k gājieniem mēs zinātu, kuru spuldzīti ieslēdz, kurš slēdzis, jābūt spēkā sekojošai nevienādībai $\frac{2^n}{2^k}\leq 1$, tātad $2^n\leq 2^k$ un $k\geq n$. Tātad minimālais nepieciešamais telpas apmeklējumu reižu skaits ir n (par to, ka ar n reizēm pietiek, varam pārliecināties pēc katras apmeklējuma reizes, dalot spuldzītes kā aprakstīts uzdevumā).

15. Ar S_i apzīmēsim naudas daudzumu, par kādu i-tajā gadā tiek veikta aizņēmuma pamatsummas atmaksa (i = 1, 2, 3 ... 10). Tad $S_i=12950-0{,}05\cdot K_i$, kur K_i ir i-tajā gadā atlikusī aizņēmuma daļa, un $S_{i+1}=12950-0{,}05\cdot\left(K_i-S_i\right)$. Varam pārliecināties, ka $S_{i+1}=1{,}05\cdot S_i$. Tātad skaitļi S_i veido ģeometrisko progresiju: $S_{1,}S_2=S_1\cdot 1{,}05, S_3=S_1\cdot 1{,}05^2,\ldots,S_{10}=S_1\cdot 1{,}05^9$. Tā kā pēc 10 gadiem jāatmaksā viss aizņēmums, tad maksimālais naudas apjoms P, ko Orbitreks varēs aizņemties, būs vienāds ar skaitļu S_i (katra gada atmaksāto daudzumu) summu.

$$P=S_1+S_1\cdot 1{,}05+S_1\cdot 1{,}05^2+\ldots+S_1\cdot 1{,}05^9=S_1\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}=\left(12950-0{,}05\cdot P\right)\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}\ .$$

Pārveidojot iegūto vienādību, iegūstam

$$P+0{,}05P\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}=12950\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}$$

$$P\left(1+\frac{0{,}05\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}\right)=12950\cdot\frac{\left(1-1{,}05^{10}\right)}{\left(1-1{,}05\right)}$$

$$P\left(-0{,}05+0{,}05\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)\right)=12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)$$

$$P\left(-0{,}05\cdot 1{,}05^{10}\right)=12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)$$

$$P=-\frac{12950\cdot\left(1-1{,}05^{10}\right)}{0{,}05\cdot 1{,}05^{10}}$$

Varam aprēķināt, ka P ≈ 99990.