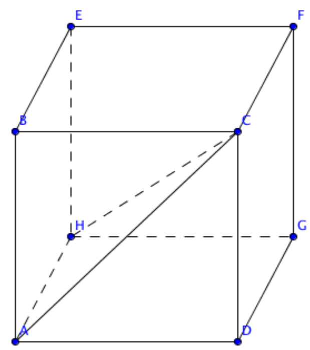
Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

8. klases atrisinājumi

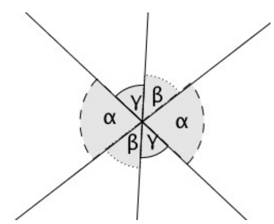
1. Nevar. Visu nogriežņu garumu summa ir 36 cm, tātad katram no trim nogriežņiem ir jābūt 12 cm gariem. Taču, piemēram, 10 cm garo nogriezni nevar salikt kopā ar nevienu no dotajiem (jebkādā kombinācijā), lai kopējais garums būtu 12 cm.

2. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{29}$, c) $\frac{2}{2n+1}$. (c) atbilde iegūta $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$ pārveidojot par $\frac{2}{2n}$ un $\frac{2}{2n+2}$.

3. Apskatīsim punktu C. No tā var novilkt nogriežņus uz
a) B, D, F, kas sakrīt ar kuba malām, tātad ir vienādi,
b) A, E, G, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonāli, tātad ir vienādi,
c) H, kas veido kvadrāta diagonāli.
Pārējiem punktiem situācija būs tāda pati (var novilkt trīs nogriežņus, kas sakrīt ar malām, trīs, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonālēm, un vienu kuba diagonāli). Tātad var novilkt trīs dažāda garuma nogriežņus, kuru galapunkti atrodas kuba virsotnēs.



4. Krustojoties trīs taisnēm, izveidojas trīs dažāda lieluma leņķi, kuru summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Pieņemsim pretējo – neviens no šiem leņķiem nepārsniedz 60°. Tādā gadījumā $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viens no leņķiem ir vismaz 60° liels.

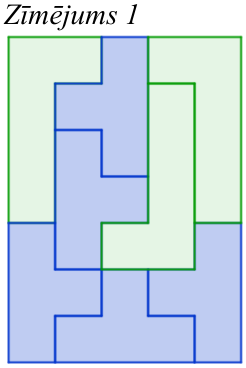


5. Skat. zīmējumu Nr. 1.

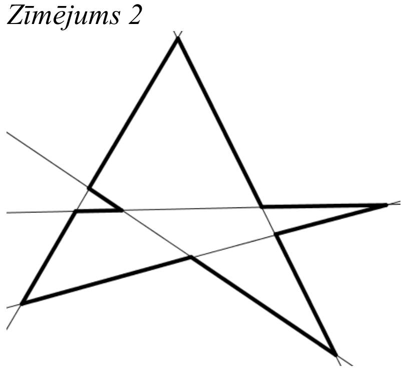
6. Andjikam atrodoties a-tajā aplī, sacensību līderis tam bija b apļus priekšā. Tātad līderis atradās (a+b)-tajā aplī. Skaidrs, ka līderis nevarēja būt nobraucis vairāk apļus, kā paredzēts sacensībās, tādēļ $a+b\leq 11$ un maksimālā a+b vērtība ir 11.

7. a) Skat. zīmējumu Nr. 2. b) skat. zīmējumu Nr. 3.

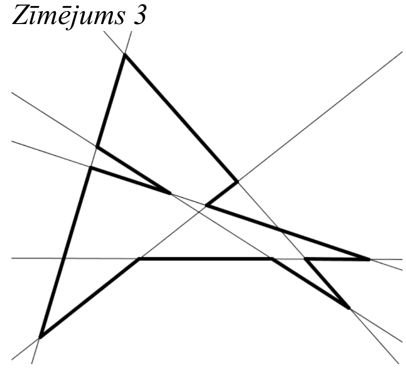
Zīmējums 1



Zīmējums 2



Zīmējums 3



8. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

9. Pieņemsim, ka uzdevuma prasības var panākt ieejot telpā 2 reizes. Tad ievērosim, ka, lai noskaidrotu, kuras spuldzītes ieslēdz slēdži, kas ieslēdz tikai pa vienai spuldzītei (sauksim šos slēdžus par vieniniekiem), ir nepieciešamas vismaz 2 slēgšanas/telpas apskates reizes, kura katrā no reizēm ir nomainīts stāvoklis tieši vienam no vieniniekiem (sec. 1)*. Lai ar vienu slēgšanu atrastu, kuras spuldzītes ieslēdz divnieki (slēdži, kuri ieslēdz divas spuldzītes), vienā no slēgšanas reizēm ir jānomaina stāvoklis tikai un vienīgi vienam divnieku slēdzim, kas ir pretrunā ar mūsu iepriekšējo secinājumu (skat. sec. 1.). Tātad vienā no slēgšanas reizēm būs ieslēgts tieši viens divnieks un viens vieninieks (sec. 2). Skaidrs, ka šajā reizē, nevarēs noskaidrot, kuras tieši spuldzītes ieslēdz ieslēgtais divnieks. Tātad arī otrajā reizē būs ieslēgts viens no divniekiem (var pieņemt, ka tas būs tas pats divnieks) un, balsoties uz sec. 1, arī viens no vieniniekiem. Bet gadījumā, kad katram no vieniniekiem nomainot stāvokli, tiek izslēgta kāda no divnieka ieslēgtajām spuldzītēm, tad abās slēgšanas reizēs būs ieslēgta tieši viena spuldzīte, kas neļaus mums noteikt, kuri slēdži ieslēdz kuras spuldzītes. Tātad ir nepieciešamas 3 telpas pārbaudes reizes.

Lai atrastu visām spuldzītēm slēdžus, kuri tās ieslēdz, ar 3 telpas apmeklējuma reizēm, pirmajā ieslēdz tikai pirmo vieninieku un atrod spuldzīti, kuru tas ieslēdz, analogi otrajā reizē ieslēdz tikai otro vieninieku, trešajā reizē ieslēdz vienu no divniekiem, noskaidrojot, kuras spuldzītes tas ieslēdz, bet neieslēgtas spuldzītes ieslēdz otrs divnieks.

*Ar 2 slēgšanas reizēm var pietikt arī tad,ja vienā no reizēm ir ieslēgti abi vieninieki un otra reizē tikai viens vieninieks. Skaidrs, ka šajā gadījumā arvien būs spēkā sec. 2. Bet tad, ja reizē, kad ir nomainīts stāvoklis divniekam, vieninieks izslēdz vienu no divniekam spuldzītēm, otrajā reizē esot ieslēgtiem abiem vieniniekiem, nespēsim noteikt, kurš no vieniniekiem, izslēdza vienu no dotā divnieka ieslēgtajām spuldzītēm.

10. $2\text{abc} \overset{?}{>} a^3 - ab^2 - ac^2 \,|: a$ (a ir trijstūra malas garums, tātad pozitīvs)

$2\text{bc} \overset{?}{>} a^2 - b^2 - c^2$

$b^2 + 2\text{bc} + c^2 \overset{?}{>} a^2$

$(b+c)^2 \overset{?}{>} a^2$

$b + c \overset{?}{>} a$ (pēc trijstūra nevienādības)

11. Pirmkārt, redzam, ka 2., 3. un 4. skolēnam kopā ir 4 punkti un starp iekrāsotajām atbildēm a) arī ir 4 punkti, tātad 5., 6. un 7. jautājumā pareizās atbildes ir attiecīgi a, c un b. Tālāk skatāmies tabulu ar tikai pirmajiem 4 jautājumiem b). Šajā tabulā redzam, ka 4., 5. un 8. skolēniem kopā ir 6 punkti, turklāt 3. jautājumā ir kopā ir 1 punkts un 2. jautājumā – 0, 1 vai 2 punkti, savukārt 1. un 4. - 0 vai 3 punkti. Vienīgais variants, lai kopā sanāktu 6 punkti, ir, ja 2. jautājumā ir 2 punkti, tātad pareizā atbilde ir c. Iegūstam c) tabulu, kur redzams, ka no atlikušajiem jautājumiem jāiegūst 9 punkti. d) tabulā norādīts punktu skaits, kāds būtu katrā jautājumā, ja atbilstošā atbilde būtu pareiza. Šo punktu summai jābūt vienādai ar 9. Šiem kritērijiem atbilst varianti aba, abc, bba, bbc un ccb. Pēc izslēgšanas metodes (piemēram, aba un bba neder, jo tad 1. skolēnam būtu 2 punkti) atrodam vienīgo pareizo variantu – abc. Tātad pareizās atbildes pēc kārtas ir a, c, b, c, a, c, b.

a)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes							P
	1	2	3	4	5	6	7	
1	c	b	b	a	c	c	c	2
2	b	a	b	a	b	b	c	1
3	c	b	c	c	b	b	c	1
4	a	c	a	b	c	a	a	2
5	a	b	b	b	c	c	c	3
6	b	a	b	b	a	c	b	4
7	b	b	c	c	a	b	c	2
8	a	c	c	b	a	c	a	4

b)

Sk. Nr.	Skolēnu atbildes				P
	1	2	3	4	
1	c	b	b	a	1
2	b	a	b	a	1
3	c	b	c	c	1
4	a	c	a	b	2
5	a	b	b	b	2
6	b	a	b	b	1
7	b	b	c	c	1
8	a	c	c	b	2

c)

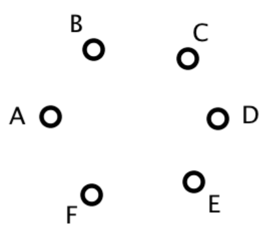
Sk. Nr.	Skolēnu atbildes			P
	1	3	4	
1	c	b	a	1
2	b	b	a	1
3	c	c	c	1
4	a	a	b	1
5	a	b	b	2
6	b	b	b	1
7	b	c	c	1
8	a	c	b	1

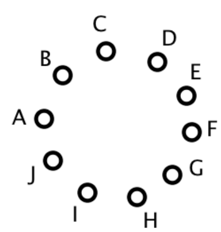
d)

	1	3	4
a	3	1	2
b	3	4	4
c	2	3	2

12. a variantā, neatkarīgi no norādītās monētas, apgriezt var tikai tai diametrāli pretējo monētu. Tātad, ja kāda monēta ir apgriezta, tai diametrāli pretējo monētu nevar apgriezt. Tātad neapgrieztas paliks vismaz trīs monētas. Apgriezt trīs monētas var, piemēram, norādot uz A, B, C un attiecīgi apgriežot D, E, F. Šajā gadījumā Zane nevar uzvarēt.

b variantā Zane var norādīt uz A un apgriezt D (A→D), H→A, E→H, B→E, I→B, F→I, C→F, J→C, G→J. Palikusi neapgriezta tikai viena monēta, tātad Zane var dabūt tēju.

a) 

b) 

13. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \leq 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

14. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdī atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar 7, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti 6 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā 5 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa 7 atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar 7. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar 7 un tam nav neviena kopīga dalītāja ar 7, tad $(x-y)$ dalās ar 7, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par 7, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

15. Atverot abās nevienādības pusēs iekavas, iegūstam

$$a^3+abc+a^2b+b^2c<2\mathrm{a}^3+2\mathrm{b}^2c\,,$$

ko pārveidojam par

$$a^3-abc+b^2c-a^2b>0$$
$$a(a^2-bc)-b(a^2-bc)>0$$
$$(a^2-bc)(a-b)>0$$

No dotā $a>b\Rightarrow a-b>0$ un $a>b>0, a>c>0\Rightarrow a^2>bc\Rightarrow a^2-bc>0$, tādēļ iegūtā nevienādība $(a^2-bc)(a-b)>0$ arī ir spēkā.

* Uzdevumā nebija precīzi norādīts, ka $a>b>c>0$.