Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 9. klasei

1. Atrodi skaitli starp:

a) $\frac{1}{3}$ un $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{14}$ un $\frac{1}{15}$

c) $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$, kur n – naturāls.

2. Cik ir dažāda garuma nogriežņu ar galapunktiem kuba virsotnēs? Pamato, ka nogriežņi tiešām sanāk ar dažādiem garumiem!

3. Pierādi, ka kvadrātu var sagriezt divos vienādos n-stūros, kur $3 \leq n \leq 7$.

4. Dotas trīs taisnes, kas krustojas vienā punktā. Pierādi, ka vismaz viens no leņķiem, ko veido šīs taisnes krustojoties, nepārsniedz 60°!

5. Andjiks piedalījās velokrosa sacensībās, kurās kopā bija janominās 11 apļi. Esot distancē a-tajā aplī viņš konstatējā, ka sacensību līderis ir viņu apdzinis par b apļiem. Kāda var būt maksimālā a un b summa?

6. Uzzīmēt tādu

a) 10-stūri,

b) 12-stūri,

kuram piemīt īpašība: uz katras taisnes, uz kuras atrodas daudzstūra viena mala, atrodas vēl tieši viena cita šī daudzstūra mala.

7. Trīs zaķi – Ašais, Brašais un Cietušais – joņo 1 km distanci. Kad Ašais finišē, Brašais ir 200 metrus aiz viņa. Savukārt, kad finišē Brašais, Cietušais ir 300 m aiz viņa. Cik metrus no finiša bija Cietušais brīdī, kad finišējā Ašais? (Visi zaķi distancē saglabā vienmērīgu ātrumu.)

8. Dots naturāls skaitlis n, kura visi dalītāji attiecīgi ir $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$. Kādiem n ir spēkā vienādība $d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k=\frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\frac{n}{d_3}+\ldots+\frac{n}{d_k}$?

9. Dots vienādojums $x^2+px+q=0$. Atrast visas p un q vērtības, kuras sakrīt ar atbilstošā vienādojuma saknēm.

10. Plaknē atzīmēti a) 4 punkti, b) 5 punkti, no kuriem nevieni trīs nav uz vienas taisnes. Kāda ir lielākā iespējamā vērtība mazākajam no leņķiem, ko veido jebkuri trīs no šiem punktiem?

11. Edgars Zanei piedāvā nopirkt tēju, ja viņa uzvarēs sekojošajā spēlē. Uz galda pa apli noliek a) 6 b) 10 monētas ar ciparu uz augšu. Zane var norādīt uz kādu no monētām ar ciparu uz augšu un apgriezt vienu no monētām, kas atrodas trīs monētu attālumā no norādītās (starp norādīto un griežamo jābūt divām citām monētām), bet tikai tad, ja tā ir ar ciparu uz augšu. Zane var turpināt spēli, kamēr vairs nevar apgriezt nevienu no monētām. Zane uzvar, ja neapgriezta palikusi ne vairāk kā viena monēta. Vai Zane var dabūt tēju no Edgara?

12. Doti n (n > 6) atsvari, kuru masas ir attiecīgi 1 grams, 2 grami, . . ., n grami. Tie salikti divos svaru kausos tā, ka svari ir līdzsvarā. Vai vienmēr var noņemt no svariem 3 atsvarus tā, lai pēc tam svari atkal būtu līdzsvarā?

13. Reāliem skaitļiem a, b, c pierādīt $(a+b+c)(a+b+c) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

14. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6. Mārtiņš un Marta spēlē spēli, kur viņi viens pēc otra (Mārtiņš sāk pirmais) katra uz tāfeles uzrakstītā skaitļa vietā uzraksta tā reizinājumu ar jebkuru sevis izvēlētu naturālu skaitli, kurš nedalās ar 7. Mārtiņš uzvarēs tad, ja kādā brīdi uz tāfeles nebūs neviena skaitļa, kuru, dalot ar 7, atlikumā paliks a, kur veselu skaitli a (0<a<7) viņš pats pirms spēles ir izvēlējies. Vai Mārtiņš var uzvarēt?

15. Dots, ka $a>b>c$. Pierādīt $(a^2+bc)(a+b)<2(a^3+b^2c)$.