Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 10. klasei

1. Trijstūra laukums ir 12 cm^2. Kāds laukums ir trijstūrim, kura virsotnes atrodas dotā trijstūra malu viduspunktos?

2. 2011.g. 1. jūlijā Latvijā pēc Iedzīvotāju reģistra datiem dzīvoja 319 267 nepilsoņi (14,4% iedzīvotāju), no tiem 65,8% bija krievi, 13,5% - baltkrievi, 9,6% - ukraiņi. Krievu nepilsoņi veido 34,6% Latvijas krievu, baltkrievu nepilsoņi veido 55,3% baltkrievu, ukraiņu nepilsoņi veido 56,3% ukraiņu. Pieņemsim, ka katram Latvijas iedzīvotājam ir viens no diviem iespējamiem statusiem: "pilsonis" vai "nepilsonis". Datu iegūšanas brīdī:

a) Cik iedzīvotāju ir Latvijā?

b) Cik Latvijas nepilsoņi ir krievi? Cik Latvijas iedzīvotāji ir krievi?

c) Cik Latvijas pilsoņi ir attiecīgi krievi, baltkrievi un ukraiņi (aprēķināt atsevišķi)?

d) Cik procentu no Latvijas pilsoņiem sastāda krievi, baltkrievi un ukraiņi, kopā ņemot?

Atbildēs cilvēku skaitus noapaļot līdz tuvākajam veselajam skaitlim, procentus uzrādīt ar vienu ciparu aiz komata!

3. Dacei ir tasīte melnās tējas, kuru viņa dzer ievērojot īpašu rituālu: kad puse tasītes ir izdzerta, tā tiek uzpildīta ar pienu (un labi samaisīta). Sākumā tasītē ir tikai tēja, bet ar katru uzpildīšanu piena īpatsvars palielinās. Kad tējas īpatsvars tasītē ir zem 5%, Dace pārstāj malkot. Cik vienības (tasītes) piena Dace izdzers? Un cik tējas?

4. Dots 11 centimetrus garš lineāls. Atrast visus veidus, kā atlikt 5 atzīmes uz lineāla (tās var atlikt tikai uz centimetru iedaļām, tai skaitā lineāla galos) tā, lai attālumi starp jebkurām divām atzīmēm būtu atšķirīgi.

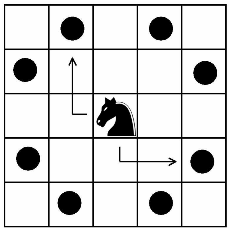
5. Pierādi, ka skaitlis $n^2 + n + 1$ ir nepāra skaitlis, ja n ir vesels skaitlis.

6. Ritvaram ir firma, kas pārdod konfektes. Pašreiz to cena ir P Ls/kg un pārdotais daudzums mēnesī ir Q kg. Apgūstot ekonomikas pamatus, Ritvars uzzināja par pieprasījuma elastības koeficientu E: cenu paaugstinot par $p\%$, pārdotais daudzums pieaug par $q\% = E \cdot p\%$ (parasti gan pārdotais daudzums samazinās, tādēļ $E < 0$). Veicot tirgus izpēti, Ritvars noskaidroja, ka pieprasījums ir neelastīgs, $E = -0.8$. Viņš veica aprēķinus: ja viņš cenu paaugstinātu par $p\%$, tad viņa ieņēmumi no konfekšu pārdošanas pieaugtu par $p\% + q\% = p\% + (-0.8)p\% = 0.2p\%$. Kādu matemātisku kļūdu Ritvars pieļāvis, mēģinot aprēķināt, kādu iespaidu uz ieņēmumiem atstās cenas izmaiņas? Kāda formula būtu pareiza? Kādā gadījumā Ritvara formula dod vērtību, kas ir tuvu pareizajai?

7. Kādu dienu klases skolēni aptaujāja viens otru, lai noskaidrotu, cik katram klasē ir draugu. Noskaidrojās, ka nav divu tādu skolēnu, kuriem būtu vienāds draugu skaits. Pierādiet, ka vismaz viens no skolēniem ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to! (Pieņemsim, ka draudzības ir abpusējas.)

8. Edgars brauca no Tallinas uz Kalngali pie Andras. Pusi distances viņš veica ar ātrumu $80\ {}^{\mathrm{km}}\!/\!{}_{\mathrm{h}}$. Ar kādu ātrumu viņam būtu jāveic atlikusī distance, lai viņa vidējais ātrums kopumā būtu $90\ {}^{\mathrm{km}}\!/\!{}_{\mathrm{h}}$?

9. Kāds ir lielākais daudzums šaha zirdziņu, ko var uzlikt uz šaha laukuma, tā, lai neviens zirdziņš nebūtu pa sitienam nevienam citam zirdziņam? Šaha zirdziņa gājieni shematiski attēloti zīmējumā.



10. Dots, ka z un r ir nenegatīvi veseli skaitļi un $z + r + zr = 2012$. Cik dažādas vērtības ir iespējamas summai $z + r$?

11. Ap apaļu galdu sēž n puikas un n meitenes. Vai droši zināms, ka var atrast tādu bērnu, kam abās pusēs sēž pa meitenei, gadījumā, ja: a) $n = 10$, b) $n = 11$?

12. Kāds ir lielākais iespējamais laukums trijstūrim, ko var pilnībā saturēt kvadrāts ar malas garumu 1?

13. Pierādīt, ka visiem pozitīviem a un b ir spēkā $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{1/a + 1/b}$.

14. Klasē ir m meitenes un n zēni. Visi sastājās vienā rindā pēc auguma, un katrs zēns izskaitīja, cik meiteņu ir īsākas par viņu. Tad audzinātāja iegūtos skaitļus saskaitīja, summā iegūstot A. Treneris savukārt rindu sanumurēja no 1 līdz $n + m$, sākot ar īsāko un beidzot ar garāko. Tad viņš sasummēja zēniem piešķirtos kārtas numurus, iegūstot skaitli T.
Pierādīt, ka $T = A + n(n + 1)/2$.

15. Entuziasti katru gadu organizē matemātikas olimpiādi, kuras uzdevumu komplekts sastāv no 35 uzdevumiem. Tie tiek sadalīti pa piecām klašu grupām, katrā pa 15 uzdevumiem (katrs uzdevums tiek ielikts vismaz vienas klašu grupas uzdevumu komplektā). Ar V apzīmēsim vidējo kopīgo uzdevumu skaitu starp katrām divām klašu grupām. Kāda ir minimālā un kāda ir maksimāla V vērtība?