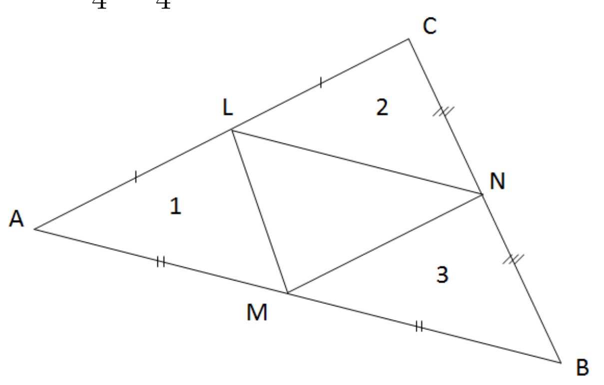
Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 10. klasei

1. Tā kā LM ir viduslīnija, tad, balstoties uz viduslīnijas īpašībām, trijstūra 1 laukums būs $\frac{1}{4}$ no trijstūra ABC laukuma. Analogi no viduslīnijām LN un MN varam secināt, ka trijstūri 2, 3 būs $\frac{1}{4}$ no dotā trijstūra ABC laukuma, tādēļ meklētais trijstūra MNL laukums būs $1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.



2.
a) $319267/0.144 = 2217131$ iedz.
b) Krievi nepilsoņi $319267 \cdot 0.658 = 210078$; krievi Latvijā $210078/0.346 = 607162$
c) pilsoņi krievi: $607162 - 210078 = \mathbf{397084}$; nepilsoņi baltkrievi: $319267 \cdot 0.135 = 43101$; kopumā baltkrievi $43101/0.553 = 77940$; pilsoņi baltkrievi $77940 - 43101 = \mathbf{34839}$; nepilsoņi ukraiņi $319267 \cdot 0.096 = 30649$; kopumā ukraiņi $30649/0.563 = 54439$; pilsoņi ukraiņi $54439 - 30649 = \mathbf{23790}$.
d) Pilsoņi Latvijā $2217131 - 319267 = 1897864$. Krievi, baltkrievi, ukraiņi pilsoņi procentuāli no visiem pilsoņiem: $(397084 + 34839 + 23790)/1897864 = \mathbf{24.0}\%$.

3. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, {}^1\!/_2, {}^1\!/_4, {}^1\!/_8, {}^1\!/_{16}, {}^1\!/_{32}$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo ${}^1\!/_{32} < {}^1\!/_{20} = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek ${}^1\!/_{32}$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir ${}^{31}\!/_{32}$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, {}^1\!/_2, {}^3\!/_4, {}^7\!/_8, {}^{15}\!/_{16}$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

4. Varam pārliecināties, ka uzdevumu nosacījumiem atbildīs šādas atzīmes uz centimetru iedaļām:

$$0, 1, 4, 9, 11$$
$$0, 3, 4, 9, 11$$

un to atbilstošie spoguļattēli:

$$0, 2, 7, 10, 11$$
$$0, 2, 7, 8, 11$$

Apskatīsim, kādēļ neder citi atzīmēšanas veidi. Lai atvieglotu pierakstu, turpmāk ar skaitļiem apzīmēsim attālumu starp mūsu izvēlētajām iedaļām, tas ir, $(0, 1, 4, 9, 11)$ apzīmēsim ar $(1, 3, 5, 2)$ utt.
Šādi attālumi $1, 2, 3, 4$ starp atzīmēm nederēs nekādās kombinācijās, jo:

- 1 nedrīkst but blakus 2, jo tad to summa (attālums starp pirmo un trešo iedaļu) sakritīs ar 3 jeb attālumu starp trešo un ceturto iedaļu
- 1 nedrīkst but blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 4
- 1 nedrīkst but blakus 4, jo tad to summa sakritīs ar 2 un 3 summu, kuri pilnīgi noteikti atradīsies viens otram blakus, jo 1 un 4 abi kopā varēs atrasties tikai pirmajās vai pēdējās pozīcijās.

Tātad pie šādām attālumiem 1 nav nekādi iespējams iekombinēt. Atliek pārbaudīt $1, 2, 3, 5$ iespējamās kombinācijas:

- ievērosim, ka 2 un 1 nedrīkst būt blakus, jo tad to summa sakritīs ar 3
- analogi 2 nedrīkstēs būt blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 5
- tātad 2 drīkst būt blakus tikai 5, turklāt esot tikai virknes sākumā vai beigās

Varam viegli pārliecināties ka uzrādītie 4 atrisinājumi (atvieglotajā pierakstā: (1,3,5,2) (3,1,5,2) (2,5,3,1) (2,5,1,3)) būs vienīgās kombinācijas, kurām izpildīsies augstākminētie 3 nosacījumi.

5. Doto izteiksmi varam pārveidot par $n(n + 1) + 1$. Skaidrs, ka vai nu $n + 1$, vai n ir pāra skaitlis, tādēļ reizinājums $n(n + 1)$ ir pāra skaitlis un $n(n + 1) + 1$ nepāra skaitlis, tāpat kā sākotnējā izteiksme.

6. Lai nebūtu jāraksta %, lietosim $p' = p/100$ un $q' = q/100$. Tad pareizā formula ir nevis $p' + q'$, bet gan $(1 + p')(1 + q') - 1 = p' + q' + p'q'$. Tātad Ritvars piemirsis pieskaitīt $p'q'$. Gadījumā, ja p' un q' absolūtā vērtība ir maza (piemēram, zem 0.10) tad to reizinājums ir krietni mazāks par $p' + q'$, (attiecīgi, 0.01 ir krietni mazāks par 0.20).
Konkrētajā piemērā Ritvars iegūtu $0.2p' - 0.8(p')^2$, tātad paaugstinot cenu par vairāk nekā 25%, ieņēmumi samazinātos. No ekonomikas viedokļa gan elastības koeficients ir definēts tikai "mazām" cenu izmaiņām.

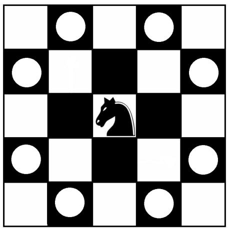
7. Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir x, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu 0, savukārt lielākais skaits $x - 1$. Tātad kopā x dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

8. Apzīmēsim kopējo distanci ar d km un meklēto ātrumu ar v $^{km}/_{h}$. Ceļā pavadītais laiks ir

$t = \frac{d/2}{80} + \frac{d/2}{v}$ bet vidējam ātrumam jābūt $d/t = 90$ km/h. Atrisinām:

$$\frac{d}{\frac{d}{2}(\frac{1}{80} + \frac{1}{v})} = 90$$
$$\frac{1}{80} + \frac{1}{v} = \frac{2}{90}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{45} - \frac{1}{80} = \frac{16-9}{720} = \frac{7}{720}$$
$$v = \frac{720}{7} = 102\frac{6}{7} \text{ km/h}$$

9. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

10. Pārveidosim sākotnējo vienādību:

$$z + r + zr + 1 = 2012 + 1$$
$$(z+1)(r+1) = 2013$$
$$(z+1) = \frac{2013}{(r+1)}$$

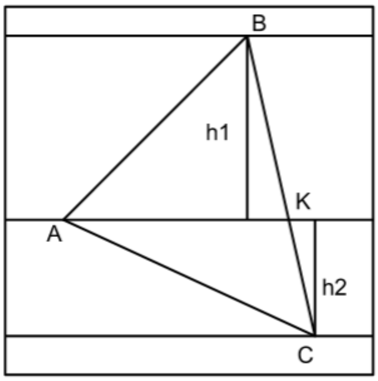
$z + 1$ ir izrēķināms, zinot $r + 1$. Atliek atrast visas iespējamās $r + 1$ vērtības. Skaitlim 2013 ir trīs pirmreizinātāji, proti, $3, 11$ un 61. Tātad $r + 1$ var saturēt vai nu nevienu, vienu, divus, vai visus trīs no šiem reizinātājiem. Visas šīs iespējas un izrietošās $z + r$ vērtības ir apkopotas tabulā.

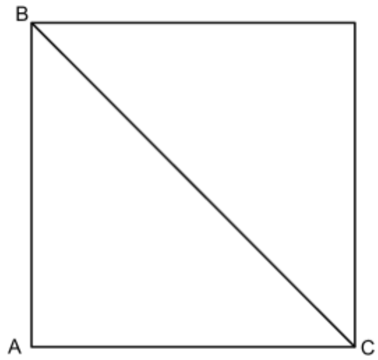
$r+1$	1	3	11	61	33	183	671	2013
$z+1$	2013	671	183	33	61	11	3	1
$z+r$	2012	672	192	92	92	192	672	2012

Kopā ir 4 dažādās $z + r$ vērtības: $92, 192, 672, 2012$.

11. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.
b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).

12. Jebkuram kvadrātā ievilktam trijstūrim var novilkt taisni AK, kas ir paralēla kvadrāta malām (skat. piemēru kreisajā attēlā. Šī taisne var arī sakrist ar kādu kvadrāta malu). Tad $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} = \dfrac{h_1 \cdot AK + h_2 \cdot AK}{2} = \dfrac{(h_1 + h_2) \cdot AK}{2}$. Skaidrs, ka visos gadījumos $h_1 + h_2 \leq 1$ un $AK \leq 1$, t.i., nepārsniedz kvadrāta malas garumu, tādēļ $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$.
Otrajā attēlā redzams piemērs ar trijstūra laukumu $\dfrac{1}{2}$.





13. Varam pārveidot doto nevienādību:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{(a+b)/ab}$$
$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Un, ievērojot, ka a un b ir pozitīvi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

kas ir spēkā, jo jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

14. Sanumurējam tikai zēnus, sākot no īsākā, no 1 līdz n. Zēnam nr. i trenera piešķirto kārtas numuru var izteikt kā $i + a_i$, kur a_i - cik meiteņu par viņu īsākas. Tātad trenera skaitlis ir par $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ lielāks nekā $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

15. Vispirms ievērosim, ka V ir vidējais lielums no desmit vērtībām:

$$V = \frac{K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15} + K_{23} + K_{23} + K_{25} + K_{34} + K_{35} + K_{45}}{10},$$

kur K_{12} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 2. klašu grupu, K_{13} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 3. klašu grupu utt.

Apzīmēsim ar a_5 uzdevumu skaitu, kas iekļauts visās 5 klašu grupās, ar a_4, a_3, a_2, a_1 uzdevumu skaitu, kas iekļauts attiecīgi 4, 3, 2 un 1 klašu grupā. Tad

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 35 \qquad 0 \leq a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \leq 15$$

Vidēji katrs uzdevumus ir iekļauts $\frac{75}{35} = 2^1/_7$ klašu grupās. Tad

$$[a_5(5-2^1/_7)+a_4(4-2^1/_7)+a_3(3-2^1/_7)]-[a_2(2^1/_7-2)+a_1(2^1/_7-1)] = 0 \tag{1}$$

tas ir, uzdevumu "svars", kas iekļauti vairāk klašu grupās nekā vidēji, ir tāds pats kā uzdevumu, kas iekļauti mazāk klašu grupās nekād vidēji. Algebriski tas izriet arī no tā, ka

$$5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 = 5 \cdot 15 = 75 = 2^1/_7(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

No vienādības (1) tad secinām:

$$a_5 + a_4 + a_3 \geq 0 \qquad\qquad a_2 + a_1 \geq 0 \tag{2}$$

Skaidrs, ja uzdevums būs ielikts visās 5 klašu grupās, tad tas tiks ieksaitīts visos 10 no iepriekšminētajiem skaitļiem ($K_{12}, K_{13} \ldots K_{45}$), ja 4 klašu grupās, tad 6 skaitļos, ja 3 klašu grupās, tad 3 skaitļos, ja 2 grupās, tad tikai vienā no skaitļiem, tādēļ $\frac{10a_5 + 6a_4 + 3a_3 + a_2}{10} = V$. Saprotams, ka V sasniegs maksimālo vērtību pie iespējas lielāka a_5, bet, ņemot vērā (2) nevienādību a_5 nevar būt 15, jo $a_1 \geq 1$ (ja arī $a_2 \geq 1$, tad tas samazina iespējamo a_5 skaitu). Tad no (1) vienādības

$$a_5(5 - 2^1/_7) - a_1(2^1/_7 - 1) = 0$$

$$20a_5 - 8a_1 = 0$$

$$20a_5 - 8(35 - a_5) = 0$$

$$28a_5 = 280$$

$$a_5 = 10, a_1 = 5, V = 10$$

Analogi varam secināt, ka minimālo vērtību V sasniegs pie pēc iespējas mazākas a_3 vērtības un $a_2 \geq 1$ (ja arī $a_1 \geq 1$, tad tas palielina iespējamo a_3 skaitu). Tad

$$a_3(3 - 2^1/_7) - a_2(2^1/_7 - 2) = 0$$

$$6a_3 - a_2 = 0$$

$$6a_3 - (35 - a_3) = 0$$

$$7a_3 = 35$$

$$a_3 = 5, a_2 = 30, V = 4,5$$

Piemēri, kas uzrādi, ka šādi uzdevumu sadalījumi pa klašu grupām, lai iegūtu $V = 10$ un $V = 4,5$ ir iespējami (ar X atzīmēti, kurā klašu grupā attiecīgie uzdevumi ir ielikti).

Piemērs ar maksimālo V = 10

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	X	X	X	X	X
6. - 10. uzd	X	X	X	X	X
7. - 15. uzd	X				
16. - 20. uzd		X			
21. - 25. uzd			X		
26. - 30. uzd				X	
31. - 35. uzd					X

Piemērs ar minimālo V = 4,5

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	X				X
6. - 10. uzd	X	X			X
7. - 15. uzd	X	X			
16. - 20. uzd		X	X		
21. - 25. uzd			X	X	
26. - 30. uzd			X	X	
31. - 35. uzd				X	X