Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 11. klasei

1. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

2. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4} =$ (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

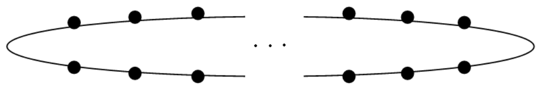
3. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo $1/32 < 1/20 = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek $1/32$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir $31/32$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, 1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

4. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

5. Ir jāizpildās šādiem nosacījumiem:

- autobusi brauc ar vienādu un vienmērīgu ātrumu,
- starp pieturām ir vienādi attālumi
- pieturu skaits ir pāra skaitlis
- autobusu skaits sakrīt ar pieturu skaitu un starp tiem ir vienāds attālums. (Var pieņemt, ka autobusam ir gala pietura, uz kuru neattiecas uzdevumu nosacījumi, jo tai pretim nav nevienas pieturas. Tad autobusu var būtu arī divreiz mazāk par pieturām - autobusi periodiski satiekas nepāra pieturās un pāra pieturās.)
- starp pēdejo un pirmo pieturu pretējā virzienā ir tāds pats attālums kā starp pieturām

Grafiska skice maršuta izskatam:



6. a) jebkuru 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summu, kur pirmais skaitlis ir patvaļīgs n, varam izteikt kā $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$. Tātad 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa nedalās ar 4,

b) analogi kā gadījumā ar 4 skaitļiem, jebkuru 5 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa būs $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$ un tā dalīsies ar 5,

c) attiecīgi neeksistē tādi pēc kārtas ņemti skaitļu, kuru summa dalās ar 6, jo $(5n+10) + (n+6) = 6n + 16 = 6(n+2) + 4$.

7. Veicam vieglus pārveidojumus:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 6abc = (a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc \ldots$$
$$\cdots + a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - ac^2)$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam prasīto:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

8. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.

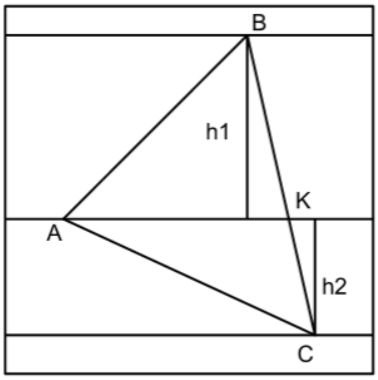
b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).

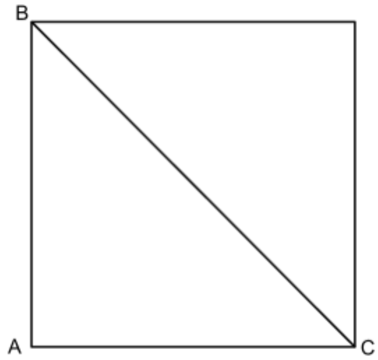
9. Kombinācijas pa 3 elementiem no 33 bez atkārtošanās, secība nav svarīga (jo tikai viena ir alfabētiska): $33 \cdot 32 \cdot 31/(3!) = 5456$.

10. Pieņemsim, ka doti divi dažādi racionāli skaitļi $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kur a, b, c, d ir veseli skaitļi. Tad šo skaitļu vidējais aritmētiskias $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2$ jeb $\frac{ad+cb}{2bd}$ būs racionāls skaitlis, jo gan $ad + cb$, gan $2bd$ būs veseli skaitļi. Skaidrs arī, ka, pieņemot $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, vidējais aritmētiskais atradīsies starp dotajiem skaitļiem

$$\frac{a}{b} < (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2 < \frac{c}{d} \qquad 0 < (\frac{c}{d} - \frac{a}{b})/2 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

11. Jebkuram kvadrātā ievilktam trijstūrim var novilkt taisni AK, kas ir paralēla kvadrāta malām (skat. piemēru kreisajā attēlā. Šī taisne var arī sakrist ar kādu kvadrāta malu). Tad $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} = \frac{h_1 \cdot AK + h_2 \cdot AK}{2} = \frac{(h_1 + h_2) \cdot AK}{2}$. Skaidrs, ka visos gadījumos $h_1 + h_2 \leq 1$ un $AK \leq 1$, t.i., nepārsniedz kvadrāta malas garumu, tādēļ $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$.
Otrajā attēlā redzams piemērs ar trijstūra laukumu $\frac{1}{2}$.





12. Ievērosim šadās sakarības:

- vārdu skaits ar vienādu sakni

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
Vārdu skaits	2	2	1	1

- formulu skaits ar vienādu oglekļu (C) skaitu

C skaits	4	3	2	7
Formulu skaits	2	2	1	1

- vārdu skaits ar vienādu galotni

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Vārdu skaits	3	2	1

- formulu skaits ar vienādām sakarībām starp H un C skaitu

Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)
Vārdu skaits	3	2	1

Tātad varam secināt, ka starp formulām un nosaukumiem ir spēkā šādās sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) $C_3H_8,\ C_4H_6,\ C_3H_4,\ C_4H_8,\ C_7H_{14},\ C_2H_2$;
propāns, butīns, propīns, butēns, heptēns, etīns.

b) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

c) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

13. Nedēļā ir 7 dienas, katrā no tām varbūtība lietot bļodu ir $^2/_3$, tātad vidējais dienu skaits būs $7 \cdot {}^2/_3 = {}^{14}/_3 = 2^2/_3$.

14. Vispirms ievērosim, ka V ir vidējais lielums no desmit vērtībām:

$$V = \frac{K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15} + K_{23} + K_{23} + K_{25} + K_{34} + K_{35} + K_{45}}{10},$$

kur K_{12} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 2. klašu grupu, K_{13} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 3. klašu grupu utt.

Apzīmēsim ar a_5 uzdevumu skaitu, kas iekļauts visās 5 klašu grupās, ar a_4, a_3, a_2, a_1 uzdevumu skaitu, kas iekļauts attiecīgi 4, 3, 2 un 1 klašu grupā. Tad

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 35 \qquad 0 \le a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \le 15$$

Vidēji katrs uzdevumus ir iekļauts $\frac{75}{35} = 2^1/_7$ klašu grupās. Tad

$$[a_5(5 - 2^1/_7) + a_4(4 - 2^1/_7) + a_3(3 - 2^1/_7)] - [a_2(2^1/_7 - 2) + a_1(2^1/_7 - 1)] = 0 \qquad (1)$$

tas ir, uzdevumu "svars", kas iekļauti vairāk klašu grupās nekā vidēji, ir tāds pats kā uzdevumu, kas iekļauti mazāk klašu grupās nekād vidēji. Algebriski tas izriet arī no tā, ka

$$5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 = 5 \cdot 15 = 75 = 2^1/_7(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

No vienādības (1) tad secinām:

$$a_5 + a_4 + a_3 \ge 0 \qquad a_2 + a_1 \ge 0 \qquad (2)$$

Skaidrs, ja uzdevums būs ielikts visās 5 klašu grupās, tad tas tiks ieksaitīts visos 10 no iepriekšminētajiem skaitļiem $(K_{12}, K_{13} \dots K_{45})$, ja 4 klašu grupās, tad 6 skaitļos, ja 3 klašu grupās, tad 3 skaitļos, ja 2 grupās, tad tikai vienā no skaitļiem, tādēļ $\frac{10a_5 + 6a_4 + 3a_3 + a_2}{10} = V$. Saprotams, ka V sasniegs maksimālo vērtību pie iespējas lielāka a_5, bet, ņemot vērā (2) nevienādību a_5 nevar būt 15, jo $a_1 \ge 1$ (ja arī $a_2 \ge 1$, tad tas samazina iespējamo a_5 skaitu). Tad no (1) vienādības

$$a_5(5 - 2^1/_7) - a_1(2^1/_7 - 1) = 0$$

$$20a_5 - 8a_1 = 0$$

$$20a_5 - 8(35 - a_5) = 0$$

$$28a_5 = 280$$

$$a_5 = 10, a_1 = 5, V = 10$$

Analogi varam secināt, ka minimālo vērtību V sasniegs pie pēc iespējas mazākas a_3 vērtības un $a_2 \ge 1$ (ja arī $a_1 \ge 1$, tad tas palielina iespējamo a_3 skaitu). Tad

$$a_3(3 - 2^1/_7) - a_2(2^1/_7 - 2) = 0$$

$$6a_3 - a_2 = 0$$

$$6a_3 - (35 - a_3) = 0$$

$$7a_3 = 35$$

$$a_3 = 5, a_2 = 30, V = 4,5$$

Piemēri, kas uzrādi, ka šādi uzdevumu sadalījumi pa klašu grupām, lai iegūtu $V = 10$ un $V = 4,5$ ir iespējami (ar X atzīmēti, kurā klašu grupā attiecīgie uzdevumi ir ielikti).

Piemērs ar maksimālo V = 10

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	X	X	X	X	X
6. - 10. uzd	X	X	X	X	X
7. - 15. uzd	X				
16. - 20. uzd		X			
21. - 25. uzd			X		
26. - 30. uzd				X	
31. - 35. uzd					X

Piemērs ar minimālo V = 4,5

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	X				X
6. - 10. uzd	X	X			X
7. - 15. uzd	X	X			
16. - 20. uzd		X	X		
21. - 25. uzd			X	X	
26. - 30. uzd			X	X	
31. - 35. uzd				X	X

15. $AB \| OP$, $AC \| OR \Rightarrow \angle ROP = \angle CAB = \alpha$.
$|BP| = |\cap RP| = 2\pi\alpha/360°$.
$|BC| = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{a}{2} 2\pi\alpha/360°$.
Tātad, pie nelielām nobīdēm α, $|BC| < |BP|$ tad un tikai tad, ja $a < 2$.