Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 7. klasei

1. Varam pieņemt, ka visos darbos Kristiāna strāda piecu darba dienu nedēļu, tātad 40 stundas nedēļā (drīkst arī pieņemt, ka Kristiāna strādā nedēļas nogalēs). Attiecīgi, ja nedēļā kopā ir $7 \cdot 24 = 168$ stundas, tad Kristiāna strādā $2,5 \cdot 40 = 120$ stundas un guļ $168 - 120 = 48$ stundas.

2. Skudra apmeklēja visas 8 kuba virstones. Tā kā no katras virsotnes līdz nakamajai jānorāpo pa vienu škautni (t.i., jānorāpo 1 sprīdis) un savu gājienu jau sāka no virsotnes, tad skudra kopā norāpoja 7 sprīžus.

3. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

4. Ar X apzīmētas atbilstošās atbildes.

	Nosacījums	Nepieciešams	Pietiekams
a)	Dotais skaitlis dalās ar 3.	X	
b)	Dotais skaitlis dalās ar 12.		X
c)	Dotais skaitlis ir 18.		X
d)	Dotais skaitlis dalās ar 2 un 3.	X	X
e)	Dotais skaitlis dalās ar 4 un 9.		X

5. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4} =$ (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

6. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, {}^1/_2, {}^1/_4, {}^1/_8, {}^1/_{16}, {}^1/_{32}$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo ${}^1/_{32} < {}^1/_{20} = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek ${}^1/_{32}$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir ${}^{31}/_{32}$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, {}^1/_2, {}^3/_4, {}^7/_8, {}^{15}/_{16}$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

7. Varam pārliecināties, ka uzdevumu nosacījumiem atbildīs šādas atzīmes uz centimetru iedaļām:

$$0, 1, 4, 9, 11$$
$$0, 3, 4, 9, 11$$

un to atbilstošie spoguļattēli:

$$0, 2, 7, 10, 11$$

$$0, 2, 7, 8, 11$$

Apskatīsim, kādēļ neder citi atzīmēšanas veidi. Lai atvieglotu pierakstu, turpmāk ar skaitļiem apzīmēsim attālumu starp mūsu izvēlētajām iedaļām, tas ir, $(0, 1, 4, 9, 11)$ apzīmēsim ar $(1, 3, 5, 2)$ utt.
Šādi attālumi $1, 2, 3, 4$ starp atzīmēm nederēs nekādās kombinācijās, jo:

- 1 nedrīkst but blakus 2, jo tad to summa (attālums starp pirmo un trešo iedaļu) sakritīs ar 3 jeb attālumu starp trešo un ceturto iedaļu
- 1 nedrīkst but blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 4
- 1 nedrīkst but blakus 4, jo tad to summa sakritīs ar 2 un 3 summu, kuri pilnīgi noteikti atradīsies viens otram blakus, jo 1 un 4 abi kopā varēs atrasties tikai pirmajās vai pēdējās pozīcijās.

Tātad pie šādām attālumiem 1 nav nekādi iespējams iekombinēt. Atliek pārbaudīt $1, 2, 3, 5$ iespējamās kombinācijas:

- ievērosim, ka 2 un 1 nedrīkst būt blakus, jo tad to summa sakritīs ar 3
- analogi 2 nedrīkstēs būt blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 5
- tātad 2 drīkst būt blakus tikai 5, turklāt esot tikai virknes sākumā vai beigās

Varam viegli pārliecināties ka uzrādītie 4 atrisinājumi (atvieglotajā pierakstā: (1,3,5,2) (3,1,5,2) (2,5,3,1) (2,5,1,3)) būs vienīgās kombinācijas, kurām izpildīsies augstākminētie 3 nosacījumi.

8. Pieņemsim pretējo, ka nebūs tādu divu brāļu, kuri spēlēs vienā komandā. Tad, tā kā ir 5 komandas, kurā katrā nespēlēs vairāk par vienu brāli, turnīrā nepiedalīsies vairāk par 5 brāļiem, kas nav iespējams, jo turnīrā piedalās visi 7 brāļi. Tātad būs tāda komanda, kurā spēlēs vismaz divi no brāļiem.

9. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

10. Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir x, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu 0, savukārt lielākais skaits $x - 1$. Tātad kopā x dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

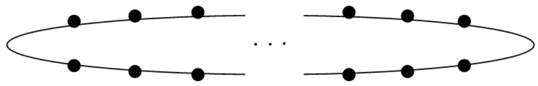
11. Ir jāizpildās šādiem nosacījumiem:

- autobusi brauc ar vienādu un vienmērīgu ātrumu,
- starp pieturām ir vienādi attālumi
- pieturu skaits ir pāra skaitlis
- autobusu skaits sakrīt ar pieturu skaitu un starp tiem ir vienāds attālums. (Var pieņemt, ka autobusam ir gala pietura, uz kuru neattiecas uzdevumu nosacījumi, jo tai pretim

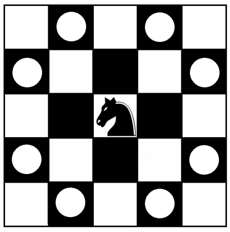
nav nevienas pieturas. Tad autobusu var būtu arī divreiz mazāk par pieturām - autobusi periodiski satiekas nepāra pieturās un pāra pieturās.)

- starp pēdejo un pirmo pieturu pretējā virzienā ir tāds pats attālums kā starp pieturām

Grafiska skice maršuta izskatam:



12. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

13. Maksimālais daudzums, ko var atlikt ir 136 (visu atsvaru summa). Apskatīsim gadījumu, kad uz kreisā svaru kausa stāv visi atsvari un tiek noņemti atsvari ar svaru k. Tad kreisajā pusē atsvaru svars bus $136 - k$, bet labajā k un tiks nosvērts svars $136 - 2k$. Tātad varēs nosvērt tikai pāra skaitļa svarus. Varam sakombinēt jebkādu k intervālā no 1 līdz 68, tādējādi uzrādot, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt visus pāra skaitļa svarus no 2 līdz 136:

- izvēlamies vienu atsvaru ar svaru intervālā $(1, 2 \ldots 16)$, iegūstam k intervālā $(1, 2 \ldots 16)$
- izvēlamies divus atsvarus - 16 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 15)$, iegūstam k intervālu $(17, 18 \ldots 31)$
- izvēlamies trīs atsvarus - 16, 15 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 14)$, iegūstam k intervālu $(32, 33 \ldots 45)$
- izvēlamies četrus atsvarus - 16, 15, 14 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 13)$, iegūstam k intervālu $(46, 47 \ldots 58)$
- izvēlamies piecus atsvarus - 16, 15, 14, 13 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 10)$, iegūstam k intervālu $(59, 60 \ldots 68)$

14. No dotajām formulām un to nosaukumiem varam novērot šādas sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

b) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

15. Apzīmēsim ar n rūķīšu skaitu, un ar k - cik nabagākajam ruķītim sākumā monētu. Tātad pirmajam rūķītim sākumā ir $n + k - 1$ monēta. Katrs rūķītis dod par 1 monētu vairāk nekā saņēmis, tātad pirmais, kuram izbeigsies nauda būs pēdējais, nabagākais rūķītis (pēc k pilniem apļiem). Taču process turpinās vēl vienu apli, kurā priekšpēdējais rūķītis līdz ar saņemtajām monētām padod tālāk savu pēdējo monētu. Tā kā pēdējam rūķītim vairs nav savas monētas, ko pielikt, process apstājas. Tajā brīdī visiem kaimiņiem ir 1 monētas starpība, izņemot pēdējam rūķītim ar viņa kaimiņiem. Viņam ir $n(k + 1) - 1$ monēta, bet viņa kaimiņiem attiecīgi 0 un $n + k - 1 - (k + 1) = n - 2$. Iegūstam vienādojumu: $n(k+1)-1 = 4(n-2)$, pārkārtojot iegūstam $n(k-3) = -7$. Kā reizinājumu to var izteikt vai nu kā $-7 \cdot 1$, vai $7 \cdot (-1)$. Tā kā n un k ir pozitīvi, der tikai otrais variants, tātad ir $n = 7$ rūķīši un nabagākajam bija $k = 2$ monētas.