Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 8. klasei

1. Varam pieņemt, ka visos darbos Kristiāna strāda piecu darba dienu nedēļu, tātad 40 stundas nedēļā (drīkst arī pieņemt, ka Kristiāna strādā nedēļas nogalēs). Attiecīgi, ja nedēļā kopā ir $7 \cdot 24 = 168$ stundas, tad Kristiāna strādā $2,5 \cdot 40 = 120$ stundas un guļ $168 - 120 = 48$ stundas.

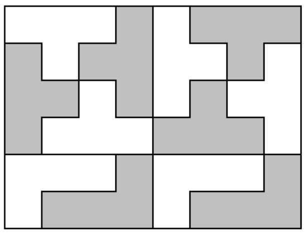
2. a) $319267/0.144 = 2217131$ iedz.

b) Krievi nepilsoņi $319267 \cdot 0.658 = 210078$; krievi Latvijā $210078/0.346 = 607162$

c) pilsoņi krievi: $607162 - 210078 = \mathbf{397084}$; nepilsoņi baltkrievi: $319267 \cdot 0.135 = 43101$; kopumā baltkrievi $43101/0.553 = 77940$; pilsoņi baltkrievi $77940 - 43101 = \mathbf{34839}$; nepilsoņi ukraiņi $319267 \cdot 0.096 = 30649$; kopumā ukraiņi $30649/0.563 = 54439$; pilsoņi ukraiņi $54439 - 30649 = \mathbf{23790}$.

d) Pilsoņi Latvijā $2217131 - 319267 = 1897864$. Krievi, baltkrievi, ukraiņi pilsoņi procentuāli no visiem pilsoņiem: $(397084 + 34839 + 23790)/1897864 = \mathbf{24.0}\%$.

3. a) var salikt (skat. attēlu)



b) nē, šādu taisnstūri nav iespējams salikt. Ievērosim, ka abu tipu figūras sastāv no 4 rūtiņām, tādēļ rūtiņu skaitam figūrā, kas salikta no šīm divām figurām, jādalās ar 4. Prasītajam taisnstūrim rūtiņu skaits nedalās ar 4.

4. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

5. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4}$ = (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

6. Pieņemsim pretējo, ka nebūs tādu divu brāļu, kuri spēlēs vienā komandā. Tad, tā kā ir 5 komandas, kurā katrā nespēlēs vairāk par vienu brāli, turnīrā nepiedalīsies vairāk par 5 brāļiem, kas nav iespējams, jo turnīrā piedalās visi 7 brāļi. Tātad būs tāda komanda, kurā spēlēs vismaz divi no brāļiem.

7. Apskatīsim visas trīs iespējas, kāds var būt skaitļa n atlikums, dalot ar trīs. Ja tas ir 0, tad n jau dalās ar 3. Ja tas ir 1, tad $n + 2$ dalīsies ar 3, un, ja atlikums ir 2, tad $n + 4$ dalīsies ar 3.

8. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

9. Kamēr iet gar daudzstūra malu, noietais attālums neatšķiras. Bet uz stūriem Eva iet pa riņķa līnijas (rādiuss 1m) segmentu, šie segmenti kopumā veidu pilnu riņķa līniju, tātad viņa noies par 2π metriem vairāk.

10. Pārveidosim sākotnējo vienādību:

$$z + r + zr + 1 = 2012 + 1$$
$$(z + 1)(r + 1) = 2013$$
$$(z + 1) = \frac{2013}{(r + 1)}$$

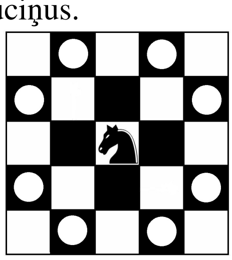
$z + 1$ ir izrēķināms, zinot $r + 1$. Atliek atrast visas iespējamās $r + 1$ vērtības. Skaitlim 2013 ir trīs pirmreizinātāji, proti, $3, 11$ un 61. Tātad $r + 1$ var saturēt vai nu nevienu, vienu, divus, vai visus trīs no šiem reizinātājiem. Visas šīs iespējas un izrietošās $z + r$ vērtības ir apkopotas tabulā.

$r+1$	1	3	11	61	33	183	671	2013
$z+1$	2013	671	183	33	61	11	3	1
$z+r$	2012	672	192	92	92	192	672	2012

Kopā ir 4 dažādās $z + r$ vērtības: $92, 192, 672, 2012$.

11. $(100 - a)(100 - b) = 100 \cdot (100 - (a + b)) + ab$ Tādēļ pirmos divus ciparus reizinājumā var aprēķināt kā $100 - (a + b)$ un pēdējos divus kā ab. Metode strādā bez "pārnešanas" pie nosacījuma $ab < 100$.

12. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

13. Der atrisinājums $r = 2, a = 2, e = 1, m = 5$. Bezgalīgi daudz atrisinājumu mēs varam konstruēt sekojoši: $r = 2k^3, a = 2k^4, e = k^6, m = 5k^6$, kur k ir jebkurš naturāls skaitlis. Tad

$$(2k^3)^4 + (2k^4)^3 + (k^6)^2 = (5k^6)^2$$
$$16k^{12} + 8k^{12} + k^{12} = 25k^{12}$$
$$25k^{12} = 25k^{12}$$

14. No dotajām formulām un to nosaukumiem varam novērot šādas sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

b) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

15. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.

b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).