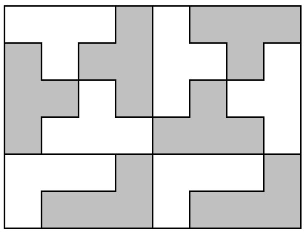
# Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

## Atrisinājumi 9. klasei

**1.** Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

**2.** a) var salikt (skat. attēlu)



b) nē, šādu taisnstūri nav iespējams salikt. Ievērosim, ka abu tipu figūras sastāv no 4 rūtiņām, tādēļ rūtiņu skaitam figūrā, kas salikta no šīm divām figurām, jādalās ar 4. Prasītajam taisnstūrim rūtiņu skaits nedalās ar 4.

**3.** Ar X apzīmētas atbilstošās atbildes.

| | Nosacījums | Nepieciešams | Pietiekams |
|---|---|---|---|
| a) | Dotais skaitlis dalās ar 3. | X | |
| b) | Dotais skaitlis dalās ar 12. | | X |
| c) | Dotais skaitlis ir 18. | | X |
| d) | Dotais skaitlis dalās ar 2 un 3. | X | X |
| e) | Dotais skaitlis dalās ar 4 un 9. | | X |

**4.** Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo $1/32 < 1/20 = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek $1/32$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir $31/32$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, 1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

**5.** Lai nebūtu jāraksta %, lietosim $p' = p/100$ un $q' = q/100$. Tad pareizā formula ir nevis $p' + q'$, bet gan $(1 + p')(1 + q') - 1 = p' + q' + p'q'$. Tātad Ritvars piemirsis pieskaitīt $p'q'$. Gadījumā, ja $p'$ un $q'$ absolūtā vērtība ir maza (piemēram, zem $0.10$) tad to reizinājums ir krietni mazāks par $p' + q'$, (attiecīgi, $0.01$ ir krietni mazāks par $0.20$).
Konkrētajā piemērā Ritvars iegūtu $0.2p' - 0.8(p')^2$, tātad paaugstinot cenu par vairāk nekā $25\%$, ieņēmumi samazinātos. No ekonomikas viedokļa gan elastības koeficients ir definēts tikai "mazām" cenu izmaiņām.

**6.** Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir $x$, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu $0$, savukārt lielākais skaits $x-1$. Tātad kopā $x$ dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

**7.** Apzīmēsim kopējo distanci ar $d$ km un meklēto ātrumu ar $v$ ${}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$. Ceļā pavadītais laiks ir $t = \frac{d/2}{80} + \frac{d/2}{v}$ bet vidējam ātrumam jābūt $d/t = 90$ ${}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$. Atrisinām:

$$\frac{d}{\frac{d}{2}(\frac{1}{80}+\frac{1}{v})} = 90$$
$$\frac{1}{80}+\frac{1}{v} = \frac{2}{90}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{45} - \frac{1}{80} = \frac{16-9}{720} = \frac{7}{720}$$
$$v = \tfrac{720}{7} = 102\tfrac{6}{7}\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$$

**8.** Veicam vieglus pārveidojumus:

$$2a^3+2b^3+2c^3-6abc = (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc\ldots$$
$$\cdots+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2)$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam prasīto:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = a^3-abc+b^3-abc+c^3-abc$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = a^3+b^3+c^3-3abc$$

**9.** Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

**10.**
a) jebkuru $4$ pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summu, kur pirmais skaitlis ir patvaļīgs $n$, varam izteikt kā $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6$. Tātad $4$ pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa nedalās ar $4$,

b) analogi kā gadījumā ar $4$ skaitļiem, jebkuru $5$ pēc kārtas ņemtu skaitļu summa būs $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$ un tā dalīsies ar 5,

c) attiecīgi neeksistē tādi pēc kārtas ņemti skaitļu, kuru summa dalās ar 6, jo $(5n+10)+(n+6) = 6n+16 = 6(n+2)+4$.

**11.** Jā, tās ir iespējams. Pirmajos $11$ mēnešos ikmēneša peļņa latos ir $600$ Ls un LVL/USD maiņas kurss ir $0.6$. Tātad kopējā peļņa par $11$ mēnešiem latos būs $6600$ Ls un $11000$ dolāri. Pedējā mēnesī būs zaudējumi - $6500$ Ls un gada peļņa $100$ Ls. Varam viegli izrēkināt, kādam bija jābūt latu maiņas kursam pēdējā mēnesī, lai gadā kopā sanāktu $100$ dolāru zaudējumi: $11000 - \dfrac{6500}{x} = -100$ (kur $x$ ir meklētais maiņas kurss), un $x = \dfrac{6500}{11100} = \dfrac{65}{111} \approx 0.58$

**12.** Kamēr iet gar daudzstūra malu, noietais attālums neatšķiras. Bet uz stūriem Eva iet pa riņķa līnijas (rādiuss 1m) segmentu, šie segmenti kopumā veidu pilnu riņķa līniju, tātad viņa noies par $2\pi$ metriem vairāk.

**13.** Maksimālais daudzums, ko var atlikt ir $136$ (visu atsvaru summa). Apskatīsim gadījumu, kad uz kreisā svaru kausa stāv visi atsvari un tiek noņemti atsvari ar svaru $k$. Tad kreisajā pusē atsvaru svars bus $136 - k$, bet labajā $k$ un tiks nosvērts svars $136 - 2k$. Tātad varēs nosvērt tikai pāra skaitļa svarus. Varam sakombinēt jebkādu $k$ intervālā no $1$ līdz $68$, tādējādi uzrādot, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt visus pāra skaitļa svarus no $2$ līdz $136$:

- izvēlamies vienu atsvaru ar svaru intervālā $(1, 2 \dots 16)$, iegūstam $k$ intervālā $(1, 2 \dots 16)$
- izvēlamies divus atsvarus - $16$ un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 15)$, iegūstam $k$ intervālu $(17, 18 \dots 31)$
- izvēlamies trīs atsvarus - $16$, $15$ un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 14)$, iegūstam $k$ intervālu $(32, 33 \dots 45)$
- izvēlamies četrus atsvarus - $16$, $15$, $14$ un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 13)$, iegūstam $k$ intervālu $(46, 47 \dots 58)$
- izvēlamies piecus atsvarus - $16$, $15$, $14$, $13$ un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 10)$, iegūstam $k$ intervālu $(59, 60 \dots 68)$

**14.** Apzīmēsim ar $n$ rūķīšu skaitu, un ar $k$ - cik nabagākajam ruķītim sākumā monētu. Tātad pirmajam rūķītim sākumā ir $n + k - 1$ monēta. Katrs rūķītis dod par $1$ monētu vairāk nekā saņēmis, tātad pirmais, kuram izbeigsies nauda būs pēdējais, nabagākais rūķītis (pēc $k$ pilniem apļiem). Taču process turpinās vēl vienu apli, kurā priekšpēdējais rūķītis līdz ar saņemtajām monētām padod tālāk savu pēdējo monētu. Tā kā pēdējam rūķītim vairs nav savas monētas, ko pielikt, process apstājas. Tajā brīdī visiem kaimiņiem ir $1$ monētas starpība, izņemot pēdējam rūķītim ar viņa kaimiņiem. Viņam ir $n(k + 1) - 1$ monēta, bet viņa kaimiņiem attiecīgi $0$ un $n + k - 1 - (k + 1) = n - 2$. Iegūstam vienādojumu: $n(k+1)-1 = 4(n-2)$, pārkārtojot iegūstam $n(k-3) = -7$. Kā reizinājumu to var izteikt vai nu kā $-7 \cdot 1$, vai $7 \cdot (-1)$. Tā kā $n$ un $k$ ir pozitīvi, der tikai otrais variants, tātad ir $n = 7$ rūķīši un nabagākajam bija $k = 2$ monētas.

**15.** Ja $n$ ir pāra skaitlis, tad doto kubu summu varam sadalīt pa pāriem un pārveidot
$(n^3 + 1^3) + ((n - 1)^3 + 2^3) + ((n - 2)^3 + 3^3) + \dots ((n/2 + 1)^3 + (n/2)^3)$
Izmantojot kubu summas formulu $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, katru no pāriem varam sadalīt divos reizinātājos, t.i.,
$(n+1)(n^2-n+1)+(n+1)((n-1)^2-4(n-1)+4)+\dots(n+1)((n/2+1)^2-n^2/2+(n/2)^2)$
Tad, ar $M$ apzīmejot visu "2. iekavu" summu, kubu summu $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ varam izteikt kā $(n + 1)M$, kas dalās ar $n + 1$ un nav pirmskaitlis.
Savukārt, ja $n$ ir nepāra skaitlis. Tad $n - 1$ ir pāra skaitlis un
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 = nM'$, tādēļ
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = nM' + n^3 = n(M' + n^2)$,
kas nav pirmskaitlis, jo dalās ar $n$.