Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 7. klasei

1. Varam pieņemt, ka visos darbos Kristiāna strāda piecu darba dienu nedēļu, tātad 40 stundas nedēļā (drīkst arī pieņemt, ka Kristiāna strādā nedēļas nogalēs). Attiecīgi, ja nedēļā kopā ir $7 \cdot 24 = 168$ stundas, tad Kristiāna strādā $2,5 \cdot 40 = 120$ stundas un guļ $168 - 120 = 48$ stundas.

2. Skudra apmeklēja visas 8 kuba virstones. Tā kā no katras virsotnes līdz nakamajai jānorāpo pa vienu škautni (t.i., jānorāpo 1 sprīdis) un savu gājienu jau sāka no virsotnes, tad skudra kopā norāpoja 7 sprīžus.

3. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

4. Ar X apzīmētas atbilstošās atbildes.

	Nosacījums	Nepieciešams	Pietiekams
a)	Dotais skaitlis dalās ar 3.	X	
b)	Dotais skaitlis dalās ar 12.		X
c)	Dotais skaitlis ir 18.		X
d)	Dotais skaitlis dalās ar 2 un 3.	X	X
e)	Dotais skaitlis dalās ar 4 un 9.		X

5. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4} =$ (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

6. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo $1/32 < 1/20 = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek $1/32$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir $31/32$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, 1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

7. Varam pārliecināties, ka uzdevumu nosacījumiem atbildīs šādas atzīmes uz centimetru iedaļām:

$$0, 1, 4, 9, 11$$
$$0, 3, 4, 9, 11$$

un to atbilstošie spoguļattēli:

$$0, 2, 7, 10, 11$$

$$0, 2, 7, 8, 11$$

Apskatīsim, kādēļ neder citi atzīmēšanas veidi. Lai atvieglotu pierakstu, turpmāk ar skaitļiem apzīmēsim attālumu starp mūsu izvēlētajām iedaļām, tas ir, $(0, 1, 4, 9, 11)$ apzīmēsim ar $(1, 3, 5, 2)$ utt.
Šādi attālumi $1, 2, 3, 4$ starp atzīmēm nederēs nekādās kombinācijās, jo:

- 1 nedrīkst but blakus 2, jo tad to summa (attālums starp pirmo un trešo iedaļu) sakritīs ar 3 jeb attālumu starp trešo un ceturto iedaļu
- 1 nedrīkst but blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 4
- 1 nedrīkst but blakus 4, jo tad to summa sakritīs ar 2 un 3 summu, kuri pilnīgi noteikti atradīsies viens otram blakus, jo 1 un 4 abi kopā varēs atrasties tikai pirmajās vai pēdējās pozīcijās.

Tātad pie šādām attālumiem 1 nav nekādi iespējams iekombinēt. Atliek pārbaudīt $1, 2, 3, 5$ iespējamās kombinācijas:

- ievērosim, ka 2 un 1 nedrīkst būt blakus, jo tad to summa sakritīs ar 3
- analogi 2 nedrīkstēs būt blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 5
- tātad 2 drīkst būt blakus tikai 5, turklāt esot tikai virknes sākumā vai beigās

Varam viegli pārliecināties ka uzrādītie 4 atrisinājumi (atvieglotajā pierakstā: (1,3,5,2) (3,1,5,2) (2,5,3,1) (2,5,1,3)) būs vienīgās kombinācijas, kurām izpildīsies augstākminētie 3 nosacījumi.

8. Pieņemsim pretējo, ka nebūs tādu divu brāļu, kuri spēlēs vienā komandā. Tad, tā kā ir 5 komandas, kurā katrā nespēlēs vairāk par vienu brāli, turnīrā nepiedalīsies vairāk par 5 brāļiem, kas nav iespējams, jo turnīrā piedalās visi 7 brāļi. Tātad būs tāda komanda, kurā spēlēs vismaz divi no brāļiem.

9. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

10. Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir x, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu 0, savukārt lielākais skaits $x - 1$. Tātad kopā x dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

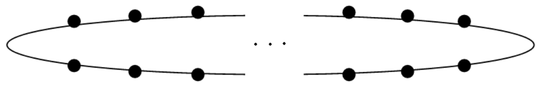
11. Ir jāizpildās šādiem nosacījumiem:

- autobusi brauc ar vienādu un vienmērīgu ātrumu,
- starp pieturām ir vienādi attālumi
- pieturu skaits ir pāra skaitlis
- autobusu skaits sakrīt ar pieturu skaitu un starp tiem ir vienāds attālums. (Var pieņemt, ka autobusam ir gala pietura, uz kuru neattiecas uzdevumu nosacījumi, jo tai pretim

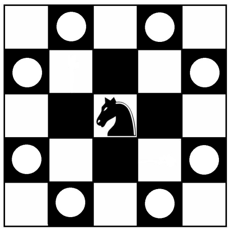
nav nevienas pieturas. Tad autobusu var būtu arī divreiz mazāk par pieturām - autobusi periodiski satiekas nepāra pieturās un pāra pieturās.)

- starp pēdejo un pirmo pieturu pretējā virzienā ir tāds pats attālums kā starp pieturām

Grafiska skice maršuta izskatam:



12. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

13. Maksimālais daudzums, ko var atlikt ir 136 (visu atsvaru summa). Apskatīsim gadījumu, kad uz kreisā svaru kausa stāv visi atsvari un tiek noņemti atsvari ar svaru k. Tad kreisajā pusē atsvaru svars bus $136 - k$, bet labajā k un tiks nosvērts svars $136 - 2k$. Tātad varēs nosvērt tikai pāra skaitļa svarus. Varam sakombinēt jebkādu k intervālā no 1 līdz 68, tādējādi uzrādot, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt visus pāra skaitļa svarus no 2 līdz 136:

- izvēlamies vienu atsvaru ar svaru intervālā $(1, 2 \ldots 16)$, iegūstam k intervālā $(1, 2 \ldots 16)$
- izvēlamies divus atsvarus - 16 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 15)$, iegūstam k intervālu $(17, 18 \ldots 31)$
- izvēlamies trīs atsvarus - 16, 15 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 14)$, iegūstam k intervālu $(32, 33 \ldots 45)$
- izvēlamies četrus atsvarus - 16, 15, 14 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 13)$, iegūstam k intervālu $(46, 47 \ldots 58)$
- izvēlamies piecus atsvarus - 16, 15, 14, 13 un svaru no intervāla $(1, 2 \ldots 10)$, iegūstam k intervālu $(59, 60 \ldots 68)$

14. No dotajām formulām un to nosaukumiem varam novērot šādas sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

b) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

15. Apzīmēsim ar n rūķīšu skaitu, un ar k - cik nabagākajam ruķītim sākumā monētu. Tātad pirmajam rūķītim sākumā ir $n + k - 1$ monēta. Katrs rūķītis dod par 1 monētu vairāk nekā saņēmis, tātad pirmais, kuram izbeigsies nauda būs pēdējais, nabagākais rūķītis (pēc k pilniem apļiem). Taču process turpinās vēl vienu apli, kurā priekšpēdējais rūķītis līdz ar saņemtajām monētām padod tālāk savu pēdējo monētu. Tā kā pēdējam rūķītim vairs nav savas monētas, ko pielikt, process apstājas. Tajā brīdī visiem kaimiņiem ir 1 monētas starpība, izņemot pēdējam rūķītim ar viņa kaimiņiem. Viņam ir $n(k + 1) - 1$ monēta, bet viņa kaimiņiem attiecīgi 0 un $n + k - 1 - (k + 1) = n - 2$. Iegūstam vienādojumu: $n(k+1)-1 = 4(n-2)$, pārkārtojot iegūstam $n(k-3) = -7$. Kā reizinājumu to var izteikt vai nu kā $-7 \cdot 1$, vai $7 \cdot (-1)$. Tā kā n un k ir pozitīvi, der tikai otrais variants, tātad ir $n = 7$ rūķīši un nabagākajam bija $k = 2$ monētas.

Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 8. klasei

1. Varam pieņemt, ka visos darbos Kristiāna strāda piecu darba dienu nedēļu, tātad 40 stundas nedēļā (drīkst arī pieņemt, ka Kristiāna strādā nedēļas nogalēs). Attiecīgi, ja nedēļā kopā ir $7 \cdot 24 = 168$ stundas, tad Kristiāna strādā $2,5 \cdot 40 = 120$ stundas un guļ $168 - 120 = 48$ stundas.

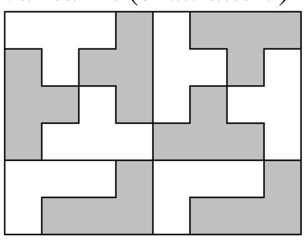
2. a) $319267/0.144 = 2217131$ iedz.

b) Krievi nepilsoņi $319267 \cdot 0.658 = 210078$; krievi Latvijā $210078/0.346 = 607162$

c) pilsoņi krievi: $607162 - 210078 = \mathbf{397084}$; nepilsoņi baltkrievi: $319267 \cdot 0.135 = 43101$; kopumā baltkrievi $43101/0.553 = 77940$; pilsoņi baltkrievi $77940 - 43101 = \mathbf{34839}$; nepilsoņi ukraiņi $319267 \cdot 0.096 = 30649$; kopumā ukraiņi $30649/0.563 = 54439$; pilsoņi ukraiņi $54439 - 30649 = \mathbf{23790}$.

d) Pilsoņi Latvijā $2217131 - 319267 = 1897864$. Krievi, baltkrievi, ukraiņi pilsoņi procentuāli no visiem pilsoņiem: $(397084 + 34839 + 23790)/1897864 = \mathbf{24.0}\%$.

3. a) var salikt (skat. attēlu)



b) nē, šādu taisnstūri nav iespējams salikt. Ievērosim, ka abu tipu figūras sastāv no 4 rūtiņām, tādēļ rūtiņu skaitam figūrā, kas salikta no šīm divām figurām, jādalās ar 4. Prasītajam taisnstūrim rūtiņu skaits nedalās ar 4.

4. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

5. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4}$ = (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

6. Pieņemsim pretējo, ka nebūs tādu divu brāļu, kuri spēlēs vienā komandā. Tad, tā kā ir 5 komandas, kurā katrā nespēlēs vairāk par vienu brāli, turnīrā nepiedalīsies vairāk par 5 brāļiem, kas nav iespējams, jo turnīrā piedalās visi 7 brāļi. Tātad būs tāda komanda, kurā spēlēs vismaz divi no brāļiem.

7. Apskatīsim visas trīs iespējas, kāds var būt skaitļa n atlikums, dalot ar trīs. Ja tas ir 0, tad n jau dalās ar 3. Ja tas ir 1, tad $n+2$ dalīsies ar 3, un, ja atlikums ir 2, tad $n+4$ dalīsies ar 3.

8. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

9. Kamēr iet gar daudzstūra malu, noietais attālums neatšķiras. Bet uz stūriem Eva iet pa riņķa līnijas (rādiuss 1m) segmentu, šie segmenti kopumā veidu pilnu riņķa līniju, tātad viņa noies par 2π metriem vairāk.

10. Pārveidosim sākotnējo vienādību:

$$z + r + zr + 1 = 2012 + 1$$
$$(z+1)(r+1) = 2013$$
$$(z+1) = \frac{2013}{(r+1)}$$

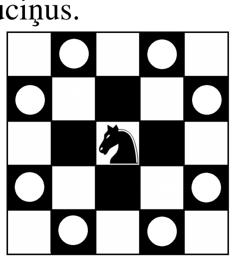
$z+1$ ir izrēķināms, zinot $r+1$. Atliek atrast visas iespējamās $r+1$ vērtības. Skaitlim 2013 ir trīs pirmreizinātāji, proti, $3, 11$ un 61. Tātad $r+1$ var saturēt vai nu nevienu, vienu, divus, vai visus trīs no šiem reizinātājiem. Visas šīs iespējas un izrietošās $z+r$ vērtības ir apkopotas tabulā.

$r+1$	1	3	11	61	33	183	671	2013
$z+1$	2013	671	183	33	61	11	3	1
$z+r$	2012	672	192	92	92	192	672	2012

Kopā ir 4 dažādās $z+r$ vērtības: $92, 192, 672, 2012$.

11. $(100-a)(100-b) = 100 \cdot (100-(a+b)) + ab$ Tādēļ pirmos divus ciparus reizinājumā var aprēķināt kā $100-(a+b)$ un pēdējos divus kā ab. Metode strādā bez "pārnešanas" pie nosacījuma $ab < 100$.

12. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

13. Der atrisinājums $r = 2, a = 2, e = 1, m = 5$. Bezgalīgi daudz atrisinājumu mēs varam konstruēt sekojoši: $r = 2k^3, a = 2k^4, e = k^6, m = 5k^6$, kur k ir jebkurš naturāls skaitlis. Tad

$$(2k^3)^4 + (2k^4)^3 + (k^6)^2 = (5k^6)^2$$
$$16k^{12} + 8k^{12} + k^{12} = 25k^{12}$$
$$25k^{12} = 25k^{12}$$

14. No dotajām formulām un to nosaukumiem varam novērot šādas sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

b) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

15. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.

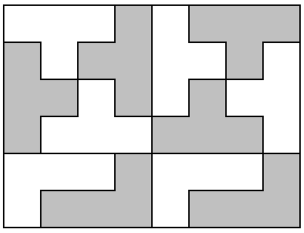
b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).

Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 9. klasei

1. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1 - 9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10 - 99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100 - 999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792 - 189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

2. a) var salikt (skat. attēlu)



b) nē, šādu taisnstūri nav iespējams salikt. Ievērosim, ka abu tipu figūras sastāv no 4 rūtiņām, tādēļ rūtiņu skaitam figūrā, kas salikta no šīm divām figurām, jādalās ar 4. Prasītajam taisnstūrim rūtiņu skaits nedalās ar 4.

3. Ar X apzīmētas atbilstošās atbildes.

	Nosacījums	Nepieciešams	Pietiekams
a)	Dotais skaitlis dalās ar 3.	X	
b)	Dotais skaitlis dalās ar 12.		X
c)	Dotais skaitlis ir 18.		X
d)	Dotais skaitlis dalās ar 2 un 3.	X	X
e)	Dotais skaitlis dalās ar 4 un 9.		X

4. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo $1/32 < 1/20 = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek $1/32$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir $31/32$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, 1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

5. Lai nebūtu jāraksta %, lietosim $p' = p/100$ un $q' = q/100$. Tad pareizā formula ir nevis $p' + q'$, bet gan $(1 + p')(1 + q') - 1 = p' + q' + p'q'$. Tātad Ritvars piemirsis pieskaitīt $p'q'$. Gadījumā, ja p' un q' absolūtā vērtība ir maza (piemēram, zem 0.10) tad to reizinājums ir krietni mazāks par $p' + q'$, (attiecīgi, 0.01 ir krietni mazāks par 0.20).
Konkrētajā piemērā Ritvars iegūtu $0.2p' - 0.8(p')^2$, tātad paaugstinot cenu par vairāk nekā 25%, ieņēmumi samazinātos. No ekonomikas viedokļa gan elastības koeficients ir definēts tikai "mazām" cenu izmaiņām.

6. Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir x, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu 0, savukārt lielākais skaits $x-1$. Tātad kopā x dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

7. Apzīmēsim kopējo distanci ar d km un meklēto ātrumu ar v km/h. Ceļā pavadītais laiks ir $t = \frac{d/2}{80} + \frac{d/2}{v}$ bet vidējam ātrumam jābūt $d/t = 90$ km/h. Atrisinām:

$$\frac{d}{\frac{d}{2}(\frac{1}{80}+\frac{1}{v})} = 90$$

$$\frac{1}{80}+\frac{1}{v} = \frac{2}{90}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{45} - \frac{1}{80} = \frac{16-9}{720} = \frac{7}{720}$$

$$v = \tfrac{720}{7} = 102\tfrac{6}{7}\ \text{km/h}$$

8. Veicam vieglus pārveidojumus:

$$2a^3+2b^3+2c^3-6abc = (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc\ldots$$
$$\cdots+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2)$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam prasīto:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = a^3-abc+b^3-abc+c^3-abc$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = a^3+b^3+c^3-3abc$$

9. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

10.
a) jebkuru 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summu, kur pirmais skaitlis ir patvaļīgs n, varam izteikt kā $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6$. Tātad 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa nedalās ar 4,
b) analogi kā gadījumā ar 4 skaitļiem, jebkuru 5 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa būs $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$ un tā dalīsies ar 5,
c) attiecīgi neeksistē tādi pēc kārtas ņemti skaitļu, kuru summa dalās ar 6, jo $(5n+10)+(n+6) = 6n+16 = 6(n+2)+4$.

11. Jā, tās ir iespējams. Pirmajos 11 mēnešos ikmēneša peļņa latos ir 600 Ls un LVL/USD maiņas kurss ir 0.6. Tātad kopējā peļņa par 11 mēnešiem latos būs 6600 Ls un 11000 dolāri. Pedējā mēnesī būs zaudējumi - 6500 Ls un gada peļņa 100 Ls. Varam viegli izrēkināt, kādam bija jābūt latu maiņas kursam pēdējā mēnesī, lai gadā kopā sanāktu 100 dolāru zaudējumi: $11000 - \dfrac{6500}{x} = -100$ (kur x ir meklētais maiņas kurss), un $x = \dfrac{6500}{11100} = \dfrac{65}{111} \approx 0.58$

12. Kamēr iet gar daudzstūra malu, noietais attālums neatšķiras. Bet uz stūriem Eva iet pa riņķa līnijas (rādiuss 1m) segmentu, šie segmenti kopumā veidu pilnu riņķa līniju, tātad viņa noies par 2π metriem vairāk.

13. Maksimālais daudzums, ko var atlikt ir 136 (visu atsvaru summa). Apskatīsim gadījumu, kad uz kreisā svaru kausa stāv visi atsvari un tiek noņemti atsvari ar svaru k. Tad kreisajā pusē atsvaru svars bus $136 - k$, bet labajā k un tiks nosvērts svars $136 - 2k$. Tātad varēs nosvērt tikai pāra skaitļa svarus. Varam sakombinēt jebkādu k intervālā no 1 līdz 68, tādējādi uzrādot, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt visus pāra skaitļa svarus no 2 līdz 136:

- izvēlamies vienu atsvaru ar svaru intervālā $(1, 2 \dots 16)$, iegūstam k intervālā $(1, 2 \dots 16)$
- izvēlamies divus atsvarus - 16 un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 15)$, iegūstam k intervālu $(17, 18 \dots 31)$
- izvēlamies trīs atsvarus - 16, 15 un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 14)$, iegūstam k intervālu $(32, 33 \dots 45)$
- izvēlamies četrus atsvarus - 16, 15, 14 un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 13)$, iegūstam k intervālu $(46, 47 \dots 58)$
- izvēlamies piecus atsvarus - 16, 15, 14, 13 un svaru no intervāla $(1, 2 \dots 10)$, iegūstam k intervālu $(59, 60 \dots 68)$

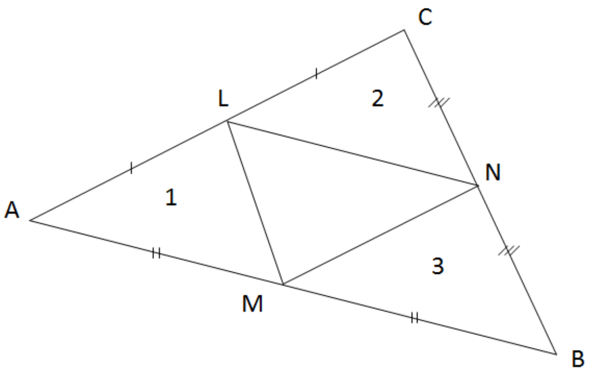
14. Apzīmēsim ar n rūķīšu skaitu, un ar k - cik nabagākajam ruķītim sākumā monētu. Tātad pirmajam rūķītim sākumā ir $n + k - 1$ monēta. Katrs rūķītis dod par 1 monētu vairāk nekā saņēmis, tātad pirmais, kuram izbeigsies nauda būs pēdējais, nabagākais rūķītis (pēc k pilniem apļiem). Taču process turpinās vēl vienu apli, kurā priekšpēdējais rūķītis līdz ar saņemtajām monētām padod tālāk savu pēdējo monētu. Tā kā pēdējam rūķītim vairs nav savas monētas, ko pielikt, process apstājas. Tajā brīdī visiem kaimiņiem ir 1 monētas starpība, izņemot pēdējam rūķītim ar viņa kaimiņiem. Viņam ir $n(k + 1) - 1$ monēta, bet viņa kaimiņiem attiecīgi 0 un $n + k - 1 - (k + 1) = n - 2$. Iegūstam vienādojumu: $n(k+1) - 1 = 4(n-2)$, pārkārtojot iegūstam $n(k-3) = -7$. Kā reizinājumu to var izteikt vai nu kā $-7 \cdot 1$, vai $7 \cdot (-1)$. Tā kā n un k ir pozitīvi, der tikai otrais variants, tātad ir $n = 7$ rūķīši un nabagākajam bija $k = 2$ monētas.

15. Ja n ir pāra skaitlis, tad doto kubu summu varam sadalīt pa pāriem un pārveidot
$(n^3 + 1^3) + ((n-1)^3 + 2^3) + ((n-2)^3 + 3^3) + \dots ((n/2+1)^3 + (n/2)^3)$
Izmantojot kubu summas formulu $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, katru no pāriem varam sadalīt divos reizinātājos, t.i.,
$(n+1)(n^2-n+1)+(n+1)((n-1)^2-4(n-1)+4)+\dots(n+1)((n/2+1)^2-n^2/2+(n/2)^2)$
Tad, ar M apzīmejot visu "2. iekavu" summu, kubu summu $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ varam izteikt kā $(n+1)M$, kas dalās ar $n+1$ un nav pirmskaitlis.
Savukārt, ja n ir nepāra skaitlis. Tad $n - 1$ ir pāra skaitlis un
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 = nM'$, tādēļ
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = nM' + n^3 = n(M' + n^2)$,
kas nav pirmskaitlis, jo dalās ar n.

Komandu olimpiāde “Atvērtā Kopa”

Atrisinājumi 10. klasei

1. Tā kā LM ir viduslīnija, tad, balstoties uz viduslīnijas īpašībām, trijstūra 1 laukums būs $\frac{1}{4}$ no trijstūra ABC laukuma. Analogi no viduslīnijām LN un MN varam secināt, ka trijstūri 2, 3 būs $\frac{1}{4}$ no dotā trijstūra ABC laukuma, tādēļ meklētais trijstūra MNL laukums būs $1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.



2. a) $319267/0.144 = 2217131$ iedz.

b) Krievi nepilsoņi $319267 \cdot 0.658 = 210078$; krievi Latvijā $210078/0.346 = 607162$

c) pilsoņi krievi: $607162 - 210078 = \mathbf{397084}$; nepilsoņi baltkrievi: $319267 \cdot 0.135 = 43101$; kopumā baltkrievi $43101/0.553 = 77940$; pilsoņi baltkrievi $77940 - 43101 = \mathbf{34839}$; nepilsoņi ukraiņi $319267 \cdot 0.096 = 30649$; kopumā ukraiņi $30649/0.563 = 54439$; pilsoņi ukraiņi $54439 - 30649 = \mathbf{23790}$.

d) Pilsoņi Latvijā $2217131 - 319267 = 1897864$. Krievi, baltkrievi, ukraiņi pilsoņi procentuāli no visiem pilsoņiem: $(397084 + 34839 + 23790)/1897864 = \mathbf{24.0}\%$.

3. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, {}^1\!/_2, {}^1\!/_4, {}^1\!/_8, {}^1\!/_{16}, {}^1\!/_{32}$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo ${}^1\!/_{32} < {}^1\!/_{20} = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek ${}^1\!/_{32}$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir ${}^{31}\!/_{32}$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, {}^1\!/_2, {}^3\!/_4, {}^7\!/_8, {}^{15}\!/_{16}$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

4. Varam pārliecināties, ka uzdevumu nosacījumiem atbildīs šādas atzīmes uz centimetru iedaļām:

$$0, 1, 4, 9, 11$$
$$0, 3, 4, 9, 11$$

un to atbilstošie spoguļattēli:

$$0, 2, 7, 10, 11$$
$$0, 2, 7, 8, 11$$

Apskatīsim, kādēļ neder citi atzīmēšanas veidi. Lai atvieglotu pierakstu, turpmāk ar skaitļiem apzīmēsim attālumu starp mūsu izvēlētajām iedaļām, tas ir, $(0, 1, 4, 9, 11)$ apzīmēsim ar $(1, 3, 5, 2)$ utt.
Šādi attālumi $1, 2, 3, 4$ starp atzīmēm nederēs nekādās kombinācijās, jo:

- 1 nedrīkst but blakus 2, jo tad to summa (attālums starp pirmo un trešo iedaļu) sakritīs ar 3 jeb attālumu starp trešo un ceturto iedaļu
- 1 nedrīkst but blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 4
- 1 nedrīkst but blakus 4, jo tad to summa sakritīs ar 2 un 3 summu, kuri pilnīgi noteikti atradīsies viens otram blakus, jo 1 un 4 abi kopā varēs atrasties tikai pirmajās vai pēdējās pozīcijās.

Tātad pie šādām attālumiem 1 nav nekādi iespējams iekombinēt. Atliek pārbaudīt $1, 2, 3, 5$ iespējamās kombinācijas:

- ievērosim, ka 2 un 1 nedrīkst būt blakus, jo tad to summa sakritīs ar 3
- analogi 2 nedrīkstēs būt blakus 3, jo tad to summa sakritīs ar 5
- tātad 2 drīkst būt blakus tikai 5, turklāt esot tikai virknes sākumā vai beigās

Varam viegli pārliecināties ka uzrādītie 4 atrisinājumi (atvieglotajā pierakstā: (1,3,5,2) (3,1,5,2) (2,5,3,1) (2,5,1,3)) būs vienīgās kombinācijas, kurām izpildīsies augstākminētie 3 nosacījumi.

5. Doto izteiksmi varam pārveidot par $n(n + 1) + 1$. Skaidrs, ka vai nu $n + 1$, vai n ir pāra skaitlis, tādēļ reizinājums $n(n + 1)$ ir pāra skaitlis un $n(n + 1) + 1$ nepāra skaitlis, tāpat kā sākotnējā izteiksme.

6. Lai nebūtu jāraksta %, lietosim $p' = p/100$ un $q' = q/100$. Tad pareizā formula ir nevis $p' + q'$, bet gan $(1 + p')(1 + q') - 1 = p' + q' + p'q'$. Tātad Ritvars piemirsis pieskaitīt $p'q'$. Gadījumā, ja p' un q' absolūtā vērtība ir maza (piemēram, zem 0.10) tad to reizinājums ir krietni mazāks par $p' + q'$, (attiecīgi, 0.01 ir krietni mazāks par 0.20).
Konkrētajā piemērā Ritvars iegūtu $0.2p' - 0.8(p')^2$, tātad paaugstinot cenu par vairāk nekā 25%, ieņēmumi samazinātos. No ekonomikas viedokļa gan elastības koeficients ir definēts tikai "mazām" cenu izmaiņām.

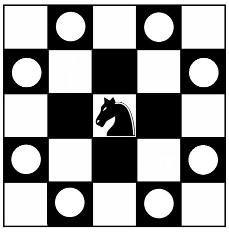
7. Ja nav tādu divus skolēnu, kam būtu vienāds draugu skaits, tad draugu skaits katram skolēnam ir atšķirīgs. Pieņemsim, ka skolēnu skaits klasē ir x, tad minimālais draugu skaits kādam skolēnam var būtu 0, savukārt lielākais skaits $x - 1$. Tātad kopā x dažādas vērtības, kas nozīmē, ka starp skolēniem būs kāds, kuram nav neviena drauga un kāds kuram visi parējie skolēni ir draugi ($x-1$ draugi). Tas acīmredzot nav iespējams, tādēļ kāds skolēns ir samelojis par savu draugu skaitu vai arī ir nepareizi novērtējis to!

8. Apzīmēsim kopējo distanci ar d km un meklēto ātrumu ar v km/h. Ceļā pavadītais laiks ir

$t = \frac{d/2}{80} + \frac{d/2}{v}$ bet vidējam ātrumam jābūt $d/t = 90$ ${}^{\text{km}}/_{\text{h}}$. Atrisinām:

$$\frac{d}{\frac{d}{2}(\frac{1}{80} + \frac{1}{v})} = 90$$
$$\frac{1}{80} + \frac{1}{v} = \frac{2}{90}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{45} - \frac{1}{80} = \frac{16-9}{720} = \frac{7}{720}$$
$$v = \frac{720}{7} = 102\frac{6}{7}\ {}^{\text{km}}/_{\text{h}}$$

9. Zirdziņš, kurš stāvēs uz baltā lauciņa apdraudēs tikai melnos lauciņus, un otrādi zirdziņš uz melnā lauciņā apdraudēs tikai baltos lauciņus.



Tātad, uzliekot 32 zirdziņus katru uz sava baltā lauciņa, tie viens otru neapdraudēs. Pierādīsim, ka vairāk par 32 zirdziņiem, tiem vienam otru nepadraudot, uz šaha laukuma nav iespējams uzlikt. Pieņemsim, ka to var izdarīt un uz laukuma ir vismaz 33 zirdziņi. Tad, ņemot vērā, ka 8×8 laukumu var sadalīt astoņos 2×4 (skat. attēlu zemāk) taisnstūros, pēc Dirihlē principa uz vizmaz viena no šādiem taisnstūriem atradīsies vismaz 5 zirdziņi. Tas savukārt nozīmē, ka vismaz divi zirdziņi stāvēs uz lauciņa ar vienādu numuru un viens otru apdraudēs. Pretruna, kas pierāda, ka vairāk par 32 uz laukuma izvietot neizdosies.

1	3	2	4
2	4	1	3

10. Pārveidosim sākotnējo vienādību:

$$z + r + zr + 1 = 2012 + 1$$
$$(z+1)(r+1) = 2013$$
$$(z+1) = \frac{2013}{(r+1)}$$

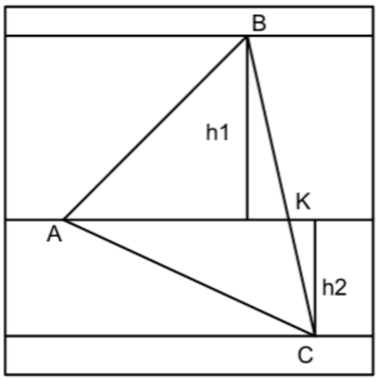
$z + 1$ ir izrēķināms, zinot $r + 1$. Atliek atrast visas iespējamās $r + 1$ vērtības. Skaitlim 2013 ir trīs pirmreizinātāji, proti, $3, 11$ un 61. Tātad $r + 1$ var saturēt vai nu nevienu, vienu, divus, vai visus trīs no šiem reizinātājiem. Visas šīs iespējas un izrietošās $z + r$ vērtības ir apkopotas tabulā.

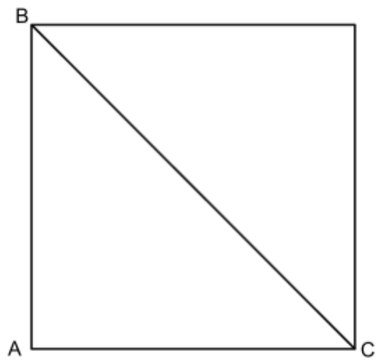
$r+1$	1	3	11	61	33	183	671	2013
$z+1$	2013	671	183	33	61	11	3	1
$z+r$	2012	672	192	92	92	192	672	2012

Kopā ir 4 dažādās $z + r$ vērtības: $92, 192, 672, 2012$.

11. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.
b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).

12. Jebkuram kvadrātā ievilktam trijstūrim var novilkt taisni AK, kas ir paralēla kvadrāta malām (skat. piemēru kreisajā attēlā. Šī taisne var arī sakrist ar kādu kvadrāta malu). Tad $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} = \dfrac{h_1 \cdot AK + h_2 \cdot AK}{2} = \dfrac{(h_1 + h_2) \cdot AK}{2}$. Skaidrs, ka visos gadījumos $h_1 + h_2 \leq 1$ un $AK \leq 1$, t.i., nepārsniedz kvadrāta malas garumu, tādēļ $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$.
Otrajā attēlā redzams piemērs ar trijstūra laukumu $\dfrac{1}{2}$.





13. Varam pārveidot doto nevienādību:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{(a+b)/ab}$$
$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Un, ievērojot, ka a un b ir pozitīvi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

kas ir spēkā, jo jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

14. Sanumurējam tikai zēnus, sākot no īsākā, no 1 līdz n. Zēnam nr. i trenera piešķirto kārtas numuru var izteikt kā $i + a_i$, kur a_i - cik meiteņu par viņu īsākas. Tātad trenera skaitlis ir par $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ lielāks nekā $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

15. Vispirms ievērosim, ka V ir vidējais lielums no desmit vērtībām:

$$V = \frac{K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15} + K_{23} + K_{23} + K_{25} + K_{34} + K_{35} + K_{45}}{10},$$

kur K_{12} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 2. klašu grupu, K_{13} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 3. klašu grupu utt.

Apzīmēsim ar a_5 uzdevumu skaitu, kas iekļauts visās 5 klašu grupās, ar a_4, a_3, a_2, a_1 uzdevumu skaitu, kas iekļauts attiecīgi 4, 3, 2 un 1 klašu grupā. Tad

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 35 \qquad 0 \le a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \le 15$$

Vidēji katrs uzdevumus ir iekļauts $\dfrac{75}{35} = 2^1\!/_7$ klašu grupās. Tad

$$[a_5(5-2^1\!/_7)+a_4(4-2^1\!/_7)+a_3(3-2^1\!/_7)]-[a_2(2^1\!/_7-2)+a_1(2^1\!/_7-1)] = 0 \tag{1}$$

tas ir, uzdevumu "svars", kas iekļauti vairāk klašu grupās nekā vidēji, ir tāds pats kā uzdevumu, kas iekļauti mazāk klašu grupās nekād vidēji. Algebriski tas izriet arī no tā, ka

$$5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 = 5 \cdot 15 = 75 = 2^1\!/_7(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

No vienādības (1) tad secinām:

$$a_5 + a_4 + a_3 \ge 0 \qquad\qquad a_2 + a_1 \ge 0 \tag{2}$$

Skaidrs, ja uzdevums būs ielikts visās 5 klašu grupās, tad tas tiks ieksaitīts visos 10 no iepriekšminētajiem skaitļiem ($K_{12}, K_{13} \dots K_{45}$), ja 4 klašu grupās, tad 6 skaitļos, ja 3 klašu grupās, tad 3 skaitļos, ja 2 grupās, tad tikai vienā no skaitļiem, tādēļ $\dfrac{10a_5 + 6a_4 + 3a_3 + a_2}{10} = V$. Saprotams, ka V sasniegs maksimālo vērtību pie iespējas lielāka a_5, bet, ņemot vērā (2) nevienādību a_5 nevar būt 15, jo $a_1 \ge 1$ (ja arī $a_2 \ge 1$, tad tas samazina iespējamo a_5 skaitu). Tad no (1) vienādības

$$a_5(5 - 2^1\!/_7) - a_1(2^1\!/_7 - 1) = 0$$

$$20a_5 - 8a_1 = 0$$

$$20a_5 - 8(35 - a_5) = 0$$

$$28a_5 = 280$$

$$a_5 = 10, a_1 = 5, V = 10$$

Analogi varam secināt, ka minimālo vērtību V sasniegs pie pēc iespējas mazākas a_3 vērtības un $a_2 \ge 1$ (ja arī $a_1 \ge 1$, tad tas palielina iespējamo a_3 skaitu). Tad

$$a_3(3 - 2^1\!/_7) - a_2(2^1\!/_7 - 2) = 0$$

$$6a_3 - a_2 = 0$$

$$6a_3 - (35 - a_3) = 0$$

$$7a_3 = 35$$

$$a_3 = 5, a_2 = 30, V = 4,5$$

Piemēri, kas uzrādi, ka šādi uzdevumu sadalījumi pa klašu grupām, lai iegūtu $V = 10$ un $V = 4,5$ ir iespējami (ar X atzīmēti, kurā klašu grupā attiecīgie uzdevumi ir ielikti).

Piemērs ar maksimālo V = 10

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	x	x	x	x	x
6. - 10. uzd	x	x	x	x	x
7. - 15. uzd	x				
16. - 20. uzd		x			
21. - 25. uzd			x		
26. - 30. uzd				x	
31. - 35. uzd					x

Piemērs ar minimālo V = 4,5

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	x				x
6. - 10. uzd	x	x			x
7. - 15. uzd	x	x			
16. - 20. uzd		x	x		
21. - 25. uzd			x	x	
26. - 30. uzd			x	x	
31. - 35. uzd				x	x

Komandu olimpiāde "Atvērtā Kopa"

Atrisinājumi 11. klasei

1. Tika iepirktas $15.84/0.02 = 792$ uzlīmes. Skapīšiem $1-9$ pietiek ar vienu ciparu, tātad 9 uzlīmes. Skapīšiem $10-99$ vajag katram 2 uzlīmes, kopā $90 \cdot 2 = 180$ uzlīmes. Skapīšiem $100-999$ katram nepieciešamas 3 uzlīmes, bet no nopirktajām vēl palikušas $792-189 = 603$ uzlīmes, t.i. 201 skapītis. Tātad kopumā klubā ir $99 + 201 = 300$ skapīši.

2. 2012. gads bija garais gads ar 366 dienām, tātad nākamajos 50 gados būs vēl $\frac{50}{4}$ = (noapaļojot) 12 garie gadi. Tātad zelta kāzas bus pēc $50 \cdot 365 + 12 = 18262$ dienām. Dalot ar 7, 18262 dod atlikumā 6, tātad pēc 50 gadiem bez vienas dienas būs apritējis pilns skaits nedēļu, kas ļauj mums secināt, ka zelta kāzas tiks svinētas vienu dienu pirms sestdienas - piektdien. Neaizmirsīsim viņus apsveikt!

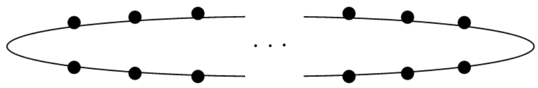
3. Ar tējas daudzumu ir vienkāršāk. Pirms katras iemalkošanas, tējas daudzums tasītē ir attiecīgi $1, {}^1\!/_2, {}^1\!/_4, {}^1\!/_8, {}^1\!/_{16}, {}^1\!/_{32}$ (šajā brīdī rituāls tiek pārtraukts, jo ${}^1\!/_{32} < {}^1\!/_{20} = 5\%$). Tātad neizdzerta paliek ${}^1\!/_{32}$ tējas, un izdzertais tējas daudzums ir ${}^{31}\!/_{32}$ tasītes. Piena īpatsvars savukārt ir attiecīgi $0, {}^1\!/_2, {}^3\!/_4, {}^7\!/_8, {}^{15}\!/_{16}$ un katrā reizē tiek izdzerta pustasīte, tātad kopumā (8+12+14+15)/16/2=49/32 tasītes piena. Var arī aprēķināt no kopējā daudzuma: piecreiz tiek izdzerta pustasīte, t.i. $5/2 = 80/32$ tasītes dzēriena, no kura $31/32$ ir tēja, tātad pārējās $49/32$ ir piens.

4. Ievērosim, ka sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Mārtiņš katru gājienu diviem skaitļiem pieskaita 5, tātad skaitļu summu uz tāfeles palielina par 10 un nemaina tās paritāti. Tātad pēc katra Mārtiņa gājiena skaitļu summa uz tāfeles paliks nepāra skaitlis, un attiecīgi Mārtiņš nevar panākt, ka visi skaitļi būs vienādi, jo tad uz tāfeles esošo skaitļu summai būtu jābut pāra skaitlim.

5. Ir jāizpildās šādiem nosacījumiem:

- autobusi brauc ar vienādu un vienmērīgu ātrumu,
- starp pieturām ir vienādi attālumi
- pieturu skaits ir pāra skaitlis
- autobusu skaits sakrīt ar pieturu skaitu un starp tiem ir vienāds attālums. (Var pieņemt, ka autobusam ir gala pietura, uz kuru neattiecas uzdevumu nosacījumi, jo tai pretim nav nevienas pieturas. Tad autobusu var būtu arī divreiz mazāk par pieturām - autobusi periodiski satiekas nepāra pieturās un pāra pieturās.)
- starp pēdejo un pirmo pieturu pretējā virzienā ir tāds pats attālums kā starp pieturām

Grafiska skice maršuta izskatam:



6. a) jebkuru 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summu, kur pirmais skaitlis ir patvaļīgs n, varam izteikt kā $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$. Tātad 4 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa nedalās ar 4,

b) analogi kā gadījumā ar 4 skaitļiem, jebkuru 5 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa būs $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$ un tā dalīsies ar 5,

c) attiecīgi neeksistē tādi pēc kārtas ņemti skaitļu, kuru summa dalās ar 6, jo $(5n + 10) + (n+6) = 6n + 16 = 6(n+2) + 4$.

7. Veicam vieglus pārveidojumus:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 6abc = (a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc \dots$$
$$\dots + a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - ac^2)$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam prasīto:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

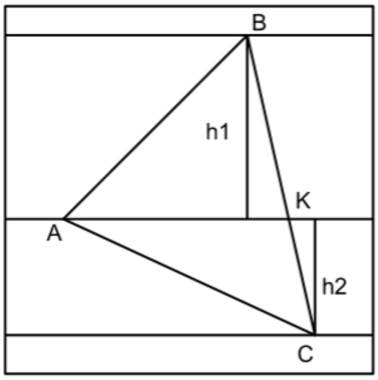
8. a) Var sasēsties 2 puikas, 2 meitenes utt., tad nav tāda bērna.
b) Sanumurējam vietas no 1 līdz 22. Vai nu nepāra, vai ari pāra numura vietās sēdes vismaz 6 meitenes (nevar būt abās mazāk par 6, jo kopā ir 11 meitenes). Taču, sasēdinot 6 meitenes, piem., pāra numura vietās, būs divas meitenes, kas sēdēs secīgās pāra vietās, tātad abpus kādam bērnam (kas sēž nepāra vietā).

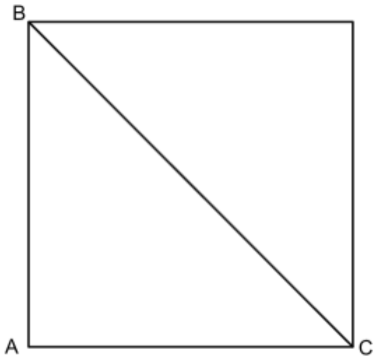
9. Kombinācijas pa 3 elementiem no 33 bez atkārtošanās, secība nav svarīga (jo tikai viena ir alfabētiska): $33 \cdot 32 \cdot 31/(3!) = 5456$.

10. Pieņemsim, ka doti divi dažādi racionāli skaitļi $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kur a, b, c, d ir veseli skaitļi. Tad šo skaitļu vidējais aritmētiskias $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2$ jeb $\frac{ad + cb}{2bd}$ būs racionāls skaitlis, jo gan $ad + cb$, gan $2bd$ būs veseli skaitļi. Skaidrs arī, ka, pieņemot $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, vidējais aritmētiskais atradīsies starp dotajiem skaitļiem

$$\frac{a}{b} < (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2 < \frac{c}{d} \qquad 0 < (\frac{c}{d} - \frac{a}{b})/2 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

11. Jebkuram kvadrātā ievilktam trijstūrim var novilkt taisni AK, kas ir paralēla kvadrāta malām (skat. piemēru kreisajā attēlā. Šī taisne var arī sakrist ar kādu kvadrāta malu). Tad $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} = \frac{h_1 \cdot AK + h_2 \cdot AK}{2} = \frac{(h_1 + h_2) \cdot AK}{2}$. Skaidrs, ka visos gadījumos $h_1 + h_2 \leq 1$ un $AK \leq 1$, t.i., nepārsniedz kvadrāta malas garumu, tādēļ $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$.
Otrajā attēlā redzams piemērs ar trijstūra laukumu $\frac{1}{2}$.





12. Ievērosim šadās sakarības:

- vārdu skaits ar vienādu sakni

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
Vārdu skaits	2	2	1	1

- formulu skaits ar vienādu oglekļu (C) skaitu

C skaits	4	3	2	7
Formulu skaits	2	2	1	1

- vārdu skaits ar vienādu galotni

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Vārdu skaits	3	2	1

- formulu skaits ar vienādām sakarībām starp H un C skaitu

Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)
Vārdu skaits	3	2	1

Tātad varam secināt, ka starp formulām un nosaukumiem ir spēkā šādās sakarības

Sakne	but-	prop-	et-	hept-
C skaits	4	3	2	7

Galotne	-īns	-ēns	-āns
Skaita sakarība	H=2·(C-1)	H=2·C	H=2·(C+1)

Attiecīgi:

a) $C_3H_8,\ C_4H_6,\ C_3H_4,\ C_4H_8,\ C_7H_{14},\ C_2H_2$;
propāns, butīns, propīns, butēns, heptēns, etīns.

b) C_2H_4 - etēns, C_2H_6 - etāns, C_7H_{12} - heptīns.

c) propēns - C_3H_6, butāns - C_4H_{10}.

13. Nedēļā ir 7 dienas, katrā no tām varbūtība lietot bļodu ir $^2/_3$, tātad vidējais dienu skaits būs $7 \cdot {^2/_3} = {^{14}/_3} = 2^2/_3$.

14. Vispirms ievērosim, ka V ir vidējais lielums no desmit vērtībām:

$$V = \frac{K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15} + K_{23} + K_{23} + K_{25} + K_{34} + K_{35} + K_{45}}{10},$$

kur K_{12} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 2. klašu grupu, K_{13} - kopīgo uzdevumu skaits starp 1. un 3. klašu grupu utt.

Apzīmēsim ar a_5 uzdevumu skaitu, kas iekļauts visās 5 klašu grupās, ar a_4, a_3, a_2, a_1 uzdevumu skaitu, kas iekļauts attiecīgi 4, 3, 2 un 1 klašu grupā. Tad

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 35 \qquad 0 \le a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 \le 15$$

Vidēji katrs uzdevumus ir iekļauts $\frac{75}{35} = 2^1/_7$ klašu grupās. Tad

$$[a_5(5-2^1/_7)+a_4(4-2^1/_7)+a_3(3-2^1/_7)]-[a_2(2^1/_7-2)+a_1(2^1/_7-1)] = 0 \qquad (1)$$

tas ir, uzdevumu "svars", kas iekļauti vairāk klašu grupās nekā vidēji, ir tāds pats kā uzdevumu, kas iekļauti mazāk klašu grupās nekād vidēji. Algebriski tas izriet arī no tā, ka

$$5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 = 5 \cdot 15 = 75 = 2^1/_7(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$$

No vienādības (1) tad secinām:

$$a_5 + a_4 + a_3 \ge 0 \qquad\qquad a_2 + a_1 \ge 0 \qquad (2)$$

Skaidrs, ja uzdevums būs ielikts visās 5 klašu grupās, tad tas tiks ieksaitīts visos 10 no iepriekšminētajiem skaitļiem $(K_{12}, K_{13} \ldots K_{45})$, ja 4 klašu grupās, tad 6 skaitļos, ja 3 klašu grupās, tad 3 skaitļos, ja 2 grupās, tad tikai vienā no skaitļiem, tādēļ $\frac{10a_5 + 6a_4 + 3a_3 + a_2}{10} = V$. Saprotams, ka V sasniegs maksimālo vērtību pie iespējas lielāka a_5, bet, ņemot vērā (2) nevienādību a_5 nevar būt 15, jo $a_1 \ge 1$ (ja arī $a_2 \ge 1$, tad tas samazina iespējamo a_5 skaitu). Tad no (1) vienādības

$$a_5(5 - 2^1/_7) - a_1(2^1/_7 - 1) = 0$$

$$20a_5 - 8a_1 = 0$$

$$20a_5 - 8(35 - a_5) = 0$$

$$28a_5 = 280$$

$$a_5 = 10, a_1 = 5, V = 10$$

Analogi varam secināt, ka minimālo vērtību V sasniegs pie pēc iespējas mazākas a_3 vērtības un $a_2 \ge 1$ (ja arī $a_1 \ge 1$, tad tas palielina iespējamo a_3 skaitu). Tad

$$a_3(3 - 2^1/_7) - a_2(2^1/_7 - 2) = 0$$

$$6a_3 - a_2 = 0$$

$$6a_3 - (35 - a_3) = 0$$

$$7a_3 = 35$$

$$a_3 = 5, a_2 = 30, V = 4,5$$

Piemēri, kas uzrādi, ka šādi uzdevumu sadalījumi pa klašu grupām, lai iegūtu $V = 10$ un $V = 4,5$ ir iespējami (ar X atzīmēti, kurā klašu grupā attiecīgie uzdevumi ir ielikti).

Piemērs ar maksimālo V = 10

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	x	x	x	x	x
6. - 10. uzd	x	x	x	x	x
7. - 15. uzd	x				
16. - 20. uzd		x			
21. - 25. uzd			x		
26. - 30. uzd				x	
31. - 35. uzd					x

Piemērs ar minimālo V = 4,5

	1	2	3	4	5
1. - 5. uzd	x				x
6. - 10. uzd	x	x			x
7. - 15. uzd	x	x			
16. - 20. uzd		x	x		
21. - 25. uzd			x	x	
26. - 30. uzd			x	x	
31. - 35. uzd				x	x

15. $AB \| OP$, $AC \| OR \Rightarrow \angle ROP = \angle CAB = \alpha$.
$|BP| = |\cap RP| = 2\pi\alpha/360°$.
$|BC| = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{a}{2}2\pi\alpha/360°$.
Tātad, pie nelielām nobīdēm α, $|BC| < |BP|$ tad un tikai tad, ja $a < 2$.