atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. 4 melnās govis un 5 brūnās govis 7 dienās dod tikpat piena, cik 6 melnās govis un 4 brūnās govis 6 dienās. Kurš no govju tipiem ir ražīgāks?

Atrisinājums:
Ar m apzīmēsim melno govju saražoto pienu 1 dienas laikā, bet ar b - brūno govju. Tad

$$\begin{aligned}(4m+5b)7 &= (6m+4b)6\\ 28m+35b &= 36m+24b\\ 11b &= 8m\\ \frac{11}{8}b &= m\end{aligned}$$

Lai brūno govju ražīgums būtu vienā līmenī ar melno govju ražīgumu, tas jāpalielina $11/8 = 1.375$ reizes. Tātad melnās govis ir ražīgākas.

2. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

3. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi $(18 \leq V \leq 22)$. Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\leq V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25-V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

4. Ja maiņas kurss ir 17 sant. pret 1 poļu zlotu (PLN), ar cik procentu uzcenojumu Irideja.lv piedāvā ievest IKEA preces no Polijas (skat. cenas formulu ilustrācijā)?

Atrisinājums:
Ja cena poļu zlotos jādala ar 4, tad tiek prasīti 25 santīmi par zlotu. Pierēķinot "atlaidi" 8%, iegūstam $25 \cdot 0.92 = 23$ santīmus. Tātad uzcenojums ir $(23 - 17)/17 = 6/17 \approx 35\%$.

5. Liene brauc piedalīties dizaina izstādē Milānā, un līdzi vēlas paņemt 10×15cm kartītes izdalīšanai. Atļautais bagāžas svars ir 8kg, no tiem 3.5kg sver pati soma, un vēl 2.7kg - drēbes un higiēnas piederumi.

a) Cik kartītes ir iespējams paņemt līdzi, ja tās drukā uz 200g/m^2 papīra?

b) Uz cik smaga papīra varētu drukāt, ja nepieciešamas 1000 kartītes?

Atrisinājums:
Kartītēm paliek 1.8kg.

a) 200g = 0.2kg, 150cm^2 = 0.015m^2. Tātad viena kartīte sver $0.2 \cdot 0.015 = 0.003$kg, un varam paņemt līdzi 600 kartītes.

b) Ja vajadzētu 1000 kartītes, tad būtu jādrukā uz $200 \cdot 600/1000 = 120$g/m^2 papīra.

6. Vispārējās negācijas, kas piemeklējušas Latvijas metalurģijas flagmani un izpaužas kā strauja ražošanas apjoma samazināšanās un nespēja tikt galā ar savām saistībām, izraisījušas straujas uzņēmuma akciju cenas svārstības. 2013. gada 12. aprīlī kompānijas akcijas cena nokritās par 86%, bet nākamajā dienā pieauga par 85,43%. Vai akciju vērtība tādējādi atgriezās ļoti tuvu ($\pm 3\%$) sākotnējai vērtībai, pirms dotajām svārstībām?

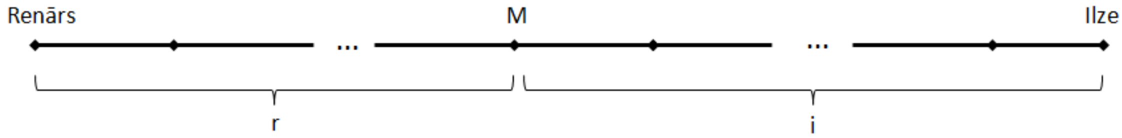
Atrisinājums:
Pieņemsim, ka metalurģijas uzņēmuma akciju cena sākotnēji bija x. Tad 12. aprīlī tā nokritās uz $(1 - 0.86)x = 0.14x$. Savukārt nākamajā dienā, tai pieaugot par 85,43%, tā palielinājās uz $0.14x \cdot (1 + 0.8543) \approx 0.26x$. Tātad tā neatgriezās ļoti tuvu sākotnējai vērtībai, lai gan cenas pieaugums procentuāli bija gandrīz tāds pats kā kritums.

7. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21 - 21 - 28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

8. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n + 1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu "attālums" līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r+i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu "attāluma" attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi.



Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r+i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r+i=1$).

9. Ir prognozēts, ka turpmāk katru gadu kādos 3 no 6 lielākajiem Marsa krāteriem iekritīs pa vienai Baltijas kosmosa zondei. Viltīgais Baltijas Kosmosa asociācijas prezidents paziņoja, ka krāterus no zondēm iztīrīs tikai tad, kad to varēs izdarīt visefektīvāk, t.i., kad katrā no 6 krāteriem gada beigās būs vienāds zonžu skaits. Vai 6 lielākie Marsa krāteri tiks kādreiz iztīrīti, ja tajos jau tagad kopā iekritušas 8 zondes?

Atrisinājums:
Lai Marsa krāterus varētu iztīrīt, tajos zonžu skaitam jābūt vienādam, no kā seko, ka kopējam zonžu skaitam jādalās ar 6. Apskatīsim zonžu kopējo skaitu krāteros gada beigās pēc g gadiem ($g=0,1,2,3...$) - tas būs $8+3g$ jeb $3(g+2)+2$. Tātad tas nedalīsies ar 3 un tādēļ nedalīsies arī ar 6 ne pie kādiem g. Krāteri nekad netiks iztīrīti.

10. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

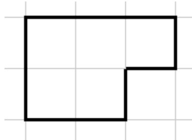
a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?
b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?
c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?
d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341+579=920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920-12=908$.
b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908+7940=8848$.
c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62+68-7=123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940-123=7817$.
d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341-12=329$.

11. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



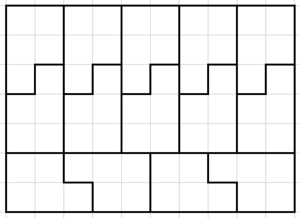
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

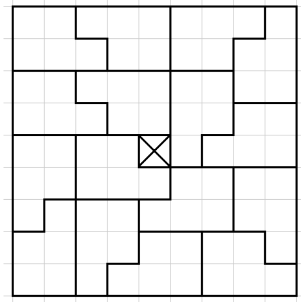
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



12. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:

Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

13. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzimējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

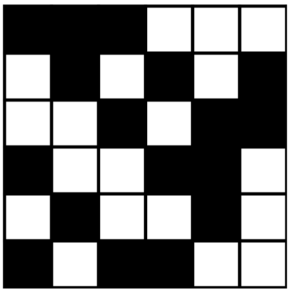
$$\begin{aligned} f_i(x_k) &\le \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \qquad \forall i,k \\ \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \quad \forall k \\ \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j). \end{aligned}$$

14. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \le k \le n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 6$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 6$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



15. Sacensībās piedalījās 2013 riteņbraucēji. Tie uzsāka sacensības viens pēc otra ar individuālu startu, un katrs no tiem brauca ar nemainīgu ātrumu (tas var atšķirties starp braucējiem). Vai varēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes? (Braucēji, kurus apdzen, arī piedalās apdzīšanā.) *Padoms:* Apskati pirmo un pēdējo startu!

Atrisinājums:
Pirmajam braucējam uzsākot sacensības, tam priekšā neviena nav. Tātad viņš nevienu neapdzīs. Bet, lai viņš piedalītos 1006 apdzīšanās, viņu apdzina tieši 1006 reizes, kas nozīmē, ka viņš finišēja kā 1007. Savukārt aiz pēdējā braucēja neviens neatradās, un neviens viņu apdzīt nevarēja, tātad viņš pats apdzina tieši 1006 braucējus un attiecīgi finišēja 1007. vietā. Sanāk, ka bija divi braucēji, kas braucienu beidza ar vienu un to pašu kārtas numuru, kas nav iespējams. Tādēļ nevarēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes.