atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Cik reižu diennaktī pulksteņa minūšu un stundu rādītāji pārklājas jeb apdzen viens otru?

Atrisinājums:
Katrā stundā minūšu rādītājs stundu rādītāju noķer un apdzen vienu reizi. Bet pēc plkst. 11 minūšu rādītājs stundu rādītāju noķer, tam esot tieši uz divpadsmitiem, tādēļ starp plkst. 12 un 13 tas stundu rādītāju vēl nespēs noķert. Tātad divpadsmit stundu ciklā stundu rādītāju apdzīs 11 reizes, bet 24 stundu ciklā 22 reizes.

2. Ja maiņas kurss ir 17 sant. pret 1 poļu zlotu (PLN), ar cik procentu uzcenojumu Irideja.lv piedāvā ievest IKEA preces no Polijas (skat. cenas formulu ilustrācijā)?

Atrisinājums:
Ja cena poļu zlotos jādala ar 4, tad tiek prasīti 25 santīmi par zlotu. Pierēķinot "atlaidi" 8%, iegūstam $25 \cdot 0.92 = 23$ santīmus. Tātad uzcenojums ir $(23 - 17)/17 = 6/17 \approx 35\%$.

3. Liene brauc piedalīties dizaina izstādē Milānā, un līdzi vēlas paņemt 10×15cm kartītes izdalīšanai. Atļautais bagāžas svars ir 8kg, no tiem 3.5kg sver pati soma, un vēl 2.7kg - drēbes un higiēnas piederumi.

a) Cik kartītes ir iespējams paņemt līdzi, ja tās drukā uz 200g/m^2 papīra?

b) Uz cik smaga papīra varētu drukāt, ja nepieciešamas 1000 kartītes?

Atrisinājums:
Kartītēm paliek 1.8kg.

a) 200g = 0.2kg, 150cm^2 = 0.015m^2. Tātad viena kartīte sver $0.2 \cdot 0.015 = 0.003$kg, un varam paņemt līdzi 600 kartītes.

b) Ja vajadzētu 1000 kartītes, tad būtu jādrukā uz $200 \cdot 600/1000 = 120$g/m^2 papīra.

4. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?

b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?

c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?

d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341 + 579 = 920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920 - 12 = 908$.

b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908 + 7940 = 8848$.

c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62 + 68 - 7 = 123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940 - 123 = 7817$.

d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341 - 12 = 329$.

5. Ir prognozēts, ka turpmāk katru gadu kādos 3 no 6 lielākajiem Marsa krāteriem iekritīs pa vienai Baltijas kosmosa zondei. Viltīgais Baltijas Kosmosa asociācijas prezidents paziņoja, ka krāterus no zondēm iztīrīs tikai tad, kad to varēs izdarīt visefektīvāk, t.i., kad katrā no 6 krāteriem gada beigās būs vienāds zonžu skaits. Vai 6 lielākie Marsa krāteri tiks kādreiz iztīrīti, ja tajos jau tagad kopā iekritušas 8 zondes?

Atrisinājums:
Lai Marsa krāterus varētu iztīrīt, tajos zonžu skaitam jābūt vienādam, no kā seko, ka kopējam zonžu skaitam jādalās ar 6. Apskatīsim zonžu kopējo skaitu krāteros gada beigās pēc g gadiem ($g = 0, 1, 2, 3...$) - tas būs $8 + 3g$ jeb $3(g + 2) + 2$. Tātad tas nedalīsies ar 3 un tādēļ nedalīsies arī ar 6 ne pie kādiem g. Krāteri nekad netiks iztīrīti.

6. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

7. Sestdienas rītā Mārtiņs apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

8. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:
Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \ldots, 10\}$ un $y \in \{0, \ldots, 5\}$.

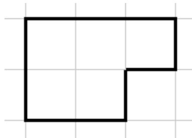
a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \ldots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10 - x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5 - y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9} (10 - x) \right) \times \left(\sum_{y=0}^{4} (5 - y) \right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

9. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



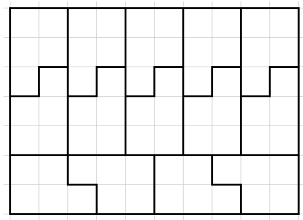
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

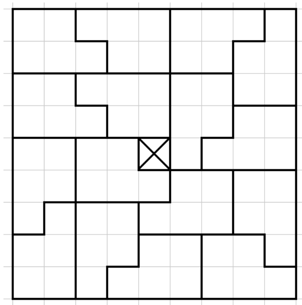
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



10. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzīmējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

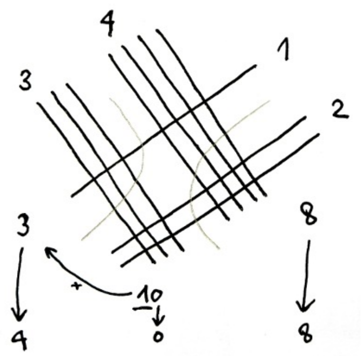
$$f_i(x_k) \le \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \qquad \forall i, k$$
$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) \le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \quad \forall k$$
$$\max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) \le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j).$$

11. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

12. Zīmējumā parādīts, kā aprēķināt $12 \times 34 = 408$, izmantojot japāņu reizināšanu. Izskaidrot, kā šī metode darbojas!



Atrisinājums:
Novelkam līnijas atbilstoši katra reizinātāja vienu un desmitu ciparam. Vienu ciparu līniju kruspunktu skaits būs rezultāta vienu cipars. Vienu un desmitu, kā arī desmitu un vienu ciparu līniju krustpunktu skaits būs rezultāta desmitu cipars. Visbeidzot, desmitu ciparu līniju kruspunktu skaits būs simtu cipars. Ja kāds no skaitiem sanāk lielāks par 9, tad veicam pārnešanu. Ar simboliem:

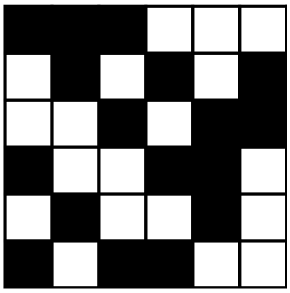
$$\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd.$$

13. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 6$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 6$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



14. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru 1987. monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Vai šajā brīdī visas monētas ir apgrieztas?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ir kāda m-tā monēta, kura būtu jāgriež otro reizi (pie kuras apstāsies griešana), pirms ir apgrieztas visas 2013 monētas. Ja tā jāgriež otrreiz, var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g < 2013$). Tad $m + 1987g = m + 2013a$ un $1987 = 2013a/g$. Tā kā $g < 2013$, tad 1987 ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013, bet tā nav, jo 1987 ir pirmskaitlis. Tātad, griežot katru 1987. monētu, visas monētas tiks apgrieztas.

15. Sacensībās piedalījās 2013 riteņbraucēji. Tie uzsāka sacensības viens pēc otra ar individuālu startu, un katrs no tiem brauca ar nemainīgu ātrumu (tas var atšķirties starp braucējiem). Vai varēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes? (Braucēji, kurus apdzen, arī piedalās apdzīšanā.) *Padoms:* Apskati pirmo un pēdējo startu!

Atrisinājums:
Pirmajam braucējam uzsākot sacensības, tam priekšā neviena nav. Tātad viņš nevienu neapdzīs. Bet, lai viņš piedalītos 1006 apdzīšanās, viņu apdzina tieši 1006 reizes, kas nozīmē, ka viņš finišēja kā 1007. Savukārt aiz pēdējā braucēja neviens neatradās, un neviens viņu apdzīt nevarēja, tātad viņš pats apdzina tieši 1006 braucējus un attiecīgi finišēja 1007. vietā. Sanāk, ka bija divi braucēji, kas braucienu beidza ar vienu un to pašu kārtas numuru, kas nav iespējams. Tādēļ nevarēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes.