atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

2. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi ($18 \leq V \leq 22$). Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\leq V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25-V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

3. Edgaram ir divas *Credit Suisse* norēķinu kartes. Par skaidras naudas izņemšanu ārzemēs ar *Maestro* karti komisija ir 5 Šveices franki + 0.5% no izņemtās summas. Savukārt *Master* kartei komisija ir 4% no izņemtās summas, bet ne mazāk kā 10 franki. Ar kuru karti ir izdevīgāk izņemt skaidru naudu?

Atrisinājums:
Ja izņemtā summa ir līdz 250CHF, tad *Maestro* komisija ir mazāka par $5+0.005\cdot 250 = 6.25$CHF, kamēr *Master* komisija ir 10CHF (jo $0.04 \cdot 250 = 10$, un mazākām summām sanāktu mazāk par 10, tātad iedarbojas minimālā komisija 10CHF). Savukārt, ja izņemtā summa ir lielāka par 250CHF, piemēram $250 + x$ franki, tad jāmaksā iepriekšējās komisijas plus $0.005x$ un $0.04x$, izmantojot attiecīgi *Maestro* un *Master* karti. Tātad abos gadījumos izdevīgāka komisija ir *Maestro*.

4. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?
b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?
c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?
d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341 + 579 = 920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920 - 12 = 908$.

b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908 + 7940 = 8848$.

c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62 + 68 - 7 = 123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940 - 123 = 7817$.

d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341 - 12 = 329$.

5. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21 - 21 - 28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

6. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzimējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

$$\begin{aligned} f_i(x_k) &\le \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \qquad \forall i, k \\ \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \quad \forall k \\ \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j). \end{aligned}$$

7. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:

Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \ldots, 10\}$ un $y \in \{0, \ldots, 5\}$.

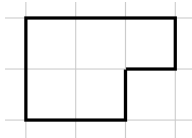
a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \ldots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10 - x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5 - y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9} (10 - x) \right) \times \left(\sum_{y=0}^{4} (5 - y) \right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

8. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



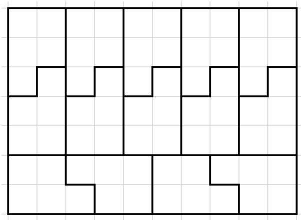
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

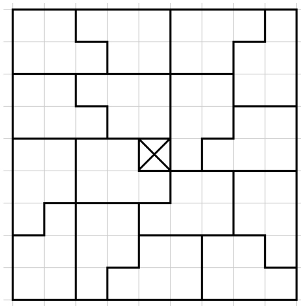
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



9. Latvijā bērniem obligāti jāpabeidz pamatskola. Šobrīd uz profesionālajām izglītības iestādēm aiziet 36% jauniešu pēc 9.klases beigšanas. Pieņemsim, ka visi pārējie turpina mācības vidusskolā ("izglītība pēc 9.klases beigšanas būtu noteikti jāturpina, jo palikšana ar šādu izglītības līmeni ir drošākais ceļš uz bezdarbnieku rindām," BNS). 9% vidusskolēnu dažādu iemeslu dēļ pārtrauc mācības un aiziet no vidusskolas. 37% vidusskolu absolventu neturpina mācības augstskolā. Balstoties uz doto informāciju (un izskaidrojot savus papildu pieņēmumus), aprēķināt, cik procentiem cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

Atrisinājums:
Lai aprēķinātu šo īpatsvaru, būs nepieciešami vairāki pieņēmumi, piemēram, ka darbspējas vecums ir no 15-64 gadiem, un visi cilvēki šajā intervālā izdzīvo. Vēl, ka minētie procenti, kā arī dzimstība, ir bijuši nemainīgi vismaz pēdējos 64 gadus. Pieņemsim arī, ka 70% augstskolu studentu iegūst augstāko izglītību, turklāt tieši 22 gadu vecumā. Balstoties uz šiem pieņēmumiem iegūstam, ka starp cilvēkiem, kas ir vismaz 22 gadus veci, augstākā izglītība ir

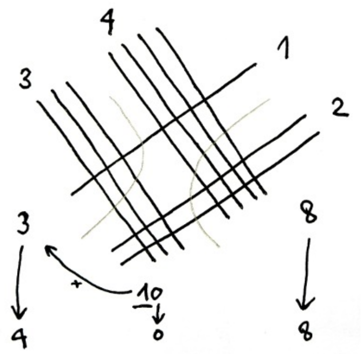
$$100\% \cdot (1 - 0.36) \cdot (1 - 0.09) \cdot (1 - 0.37) \cdot 0.70 = 0.64 \cdot 0.91 \cdot 0.63 \cdot 0.70 \approx 26\%$$

Vēl no pieņēmumiem izriet, ka darbspējīgo cilvēku vidū tādi, kas ir vismaz 22 gadus veci ir $(64 - 21)/(64 - 14) = 43/50 = 86\%$. Līdz ar to, pēc mūsu aplēsēm $0.86 \cdot 0.26 \approx 22\%$ cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

10. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

11. Zīmējumā parādīts, kā aprēķināt $12 \times 34 = 408$, izmantojot japāņu reizināšanu. Izskaidrot, kā šī metode darbojas!

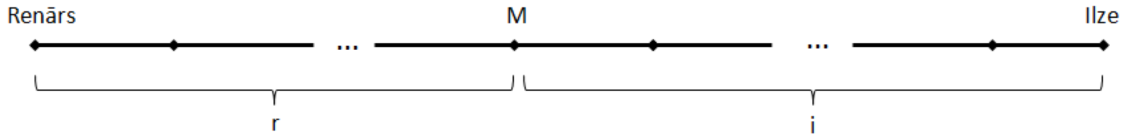


Atrisinājums:
Novelkam līnijas atbilstoši katra reizinātāja vienu un desmitu ciparam. Vienu ciparu līniju kruspunktu skaits būs rezultāta vienu cipars. Vienu un desmitu, kā arī desmitu un vienu ciparu līniju krustpunktu skaits būs rezultāta desmitu cipars. Visbeidzot, desmitu ciparu līniju kruspunktu skaits būs simtu cipars. Ja kāds no skaitiem sanāk lielāks par 9, tad veicam pārnešanu. Ar simboliem:

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd.$$

12. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n+1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu "attālums" līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r+i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu "attāluma" attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi.



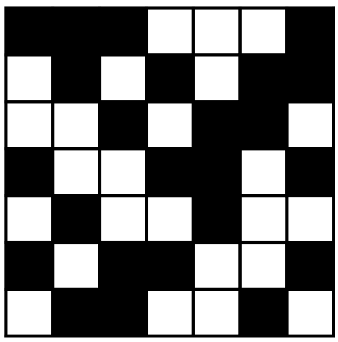
Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r+i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r+i=1$).

13. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



14. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru 1987. monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Vai šajā brīdī visas monētas ir apgrieztas?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ir kāda m-tā monēta, kura būtu jāgriež otro reizi (pie kuras apstāsies griešana), pirms ir apgrieztas visas 2013 monētas. Ja tā jāgriež otrreiz, var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g < 2013$). Tad $m + 1987g = m + 2013a$ un $1987 = 2013a/g$. Tā kā $g < 2013$, tad 1987 ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013, bet tā nav, jo 1987 ir pirmskaitlis. Tātad, griežot katru 1987. monētu, visas monētas tiks apgrieztas.

15. Kādi ir iespējamie vienādmalu trijstūra malas garumi, ja zināms, ka to var sagriezt vienādsānu trapecēs, kuru viena pamata garums ir 2 cm, bet pārējās malas ir 1 cm garas.

Atrisinājums:

Var pamanīt un pierādīt, ka aprakstītās trapeces leņķi ir $60°$ un $120°$ un visas griezuma līnijas būs paralēlas sākotnējā vienādmalu trijstūra malām. Tātad varam sadalīt sākotnējo trijstūri regulāros trijstūros ar malas garumu 1 cm. Katra trapece sastāv no trīs šādiem trijstūriem. Savukārt regulārā trijstūrī ar malas garumu n cm ir par $2n-1$ šādu trijstūru vairāk nekā trijstūri ar malas garumu $n-1$ cm.

n, malas garums, cm	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2n-1$	1	3	5	7	9	$\cdots$
vienības trijstūru skaits	1	4	9	16	25	$\cdots$

Varam pamanīt (un pierādīt) to, ka vienības trijstūru skaits regulārā trijstūri ar malas garumu n cm ir n^2. Varam arī apskatīt vienības trijstūru skaita pieauguma atlikumu pēc dalījuma ar 3. Jebkurā gadījumā - pamanīsim, ka tikai katrs trešais (sākot ar $n=3$) garums dod vienības trijstūru skaitu, kas dalās ar 3. Ja $n=3$, to samērā viegli varam sagriezt dotajās trapecēs. Savukārt visiem citiem n, kas dalās ar 3, attiecīgo trijstūri varam sagriezt regulāros trijstūros ar malas garumu 3 cm, ko jau mākam sagriezt prasītajās trapecēs.