atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

10. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

2. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi ($18 \le V \le 22$). Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\le V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25-V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

3. Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

4. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:
Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \ldots, 10\}$ un $y \in \{0, \ldots, 5\}$.

a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \ldots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10 - x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5 - y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9} (10 - x) \right) \times \left(\sum_{y=0}^{4} (5 - y) \right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

5. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

6. Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas F = *fokusa attālums* / *atvēruma diametrs*, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk ieplūstošās gaismas. Ieplūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.

Slēdža ātrums sek.	**1/125**	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvērums	**F5.6**	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	**200**	?	400	100	200	?

Atrisinājums:
ISO 400, F7.8, 1/250 sek., F2.8, ISO 800.

7. Latvijā bērniem obligāti jāpabeidz pamatskola. Šobrīd uz profesionālajām izglītības iestādēm aiziet 36% jauniešu pēc 9.klases beigšanas. Pieņemsim, ka visi pārējie turpina mācības vidusskolā ("izglītība pēc 9.klases beigšanas būtu noteikti jāturpina, jo palikšana ar šādu izglītības līmeni ir drošākais ceļš uz bezdarbnieku rindām," BNS). 9% vidusskolēnu dažādu iemeslu dēļ pārtrauc mācības un aiziet no vidusskolas. 37% vidusskolu absolventu neturpina mācības augstskolā. Balstoties uz doto informāciju (un izskaidrojot savus papildu pieņēmumus), aprēķināt, cik procentiem cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

Atrisinājums:
Lai aprēķinātu šo īpatsvaru, būs nepieciešami vairāki pieņēmumi, piemēram, ka darbspējas vecums ir no 15-64 gadiem, un visi cilvēki šajā intervālā izdzīvo. Vēl, ka minētie procenti, kā arī dzimstība, ir bijuši nemainīgi vismaz pēdējos 64 gadus. Pieņemsim arī, ka 70% augstskolu studentu iegūst augstāko izglītību, turklāt tieši 22 gadu vecumā. Balstoties uz šiem pieņēmumiem iegūstam, ka starp cilvēkiem, kas ir vismaz 22 gadus veci, augstākā izglītība ir

$$100\% \cdot (1 - 0.36) \cdot (1 - 0.09) \cdot (1 - 0.37) \cdot 0.70 = 0.64 \cdot 0.91 \cdot 0.63 \cdot 0.70 \approx 26\%$$

Vēl no pieņēmumiem izriet, ka darbspējīgo cilvēku vidū tādi, kas ir vismaz 22 gadus veci ir $(64 - 21)/(64 - 14) = 43/50 = 86\%$. Līdz ar to, pēc mūsu aplēsēm $0.86 \cdot 0.26 \approx 22\%$ cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

8. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	”Apēsts”	Samaksāts par vilcienu	”Nobraukts”	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

9. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n+1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu “attālumu” līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu “attālums” līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r+i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu “attāluma” attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu “ceļš” starp Renāru un Ilzi.

Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r+i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu “ceļš” starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r+i=1$).

10. Pierādīt, ka, aprēķinot harmonisko summu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$ pietiekami lielam N, mēs varēsim pārsniegt jebkuru prasīto skaitli.
Padoms: salīdzini šo summu ar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$.

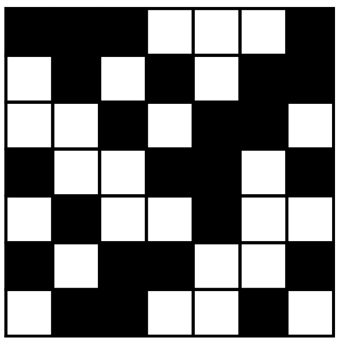
Atrisinājums:
Izmantojam padomu un ievērojam: ja mēs izlaižam pirmo locekli $1/1$ no harmoniskās summas, tad katrs nākamais summas loceklis ir vismaz tikpat liels, kā atbilstošais loceklis "padoma" summā. Ievērosim arī, ka padoma summā pirmais loceklis ir $1/2$, nākamie divi kopā veido $1/2$, nākamie četri kopā atkal veido $1/2$, ..., nākamie 2^{n-1} atkal veido $1/2$. Tātad, saskaitot $(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^n - 1$ pirmos locekļus, summā iegūstam $n/2$. Līdz ar to, ja mēs aprēķinām harmonisko summu ar $N = 2^n$, mēs iegūstam vismaz $1/1 + n/2$. Tātad, ja "prasītais" skaitlis, kas jāpārsniedz, ir x, tad izvēloties pietiekami lielu n (piemēram, $n = 2x$), harmoniskā summa ar $N = 2^n$ būs vismaz $x + 1$.

11. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



12. Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **11.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n, kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)

Atrisinājums:
Abos gadījumos atbilde ir $n = 7$. Vienā dienā ir $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekundes, nedēļā $604800 \approx 6 \cdot 10^5$ sekundes. Tātad varam pārbaudīt aptuveni $6 \cdot 10^{14}$ krāsojumu. 7×7 kvadrātam ir

$$2^{49} = 2^{50}/2 = (2^{10})^5/2 \approx (10^3)^5/2 = 5 \cdot 10^{14}$$

iespējamie krāsojumi. Tātad tas paņems aptuveni nedēļu. Savukārt 8×8 kvadrātam ir 2^{64} iespējamie krāsojumi, kas ir $2^{15} \approx 32000$ reižu vairāk nekā iepriekš. Vienā gadā ir aptuveni 50 nedēļas, simts gados - ap 5000. Tātad nepietiks laika, lai pārbaudītu visus 8×8 krāsojumus.

13. Kādi ir iespējamie vienādmalu trijstūra malas garumi, ja zināms, ka to var sagriezt vienādsānu trapecēs, kuru viena pamata garums ir 2 cm, bet pārējās malas ir 1 cm garas.

Atrisinājums:
Var pamanīt un pierādīt, ka aprakstītās trapeces leņķi ir $60°$ un $120°$ un visas griezuma līnijas būs paralēlas sākotnējā vienādmalu trijstūra malām. Tātad varam sadalīt sākotnējo trijstūri regulāros trijstūros ar malas garumu 1 cm. Katra trapece sastāv no trīs šādiem trijstūriem. Savukārt regulārā trijstūrī ar malas garumu n cm ir par $2n - 1$ šādu trijstūru vairāk nekā trijstūri ar malas garumu $n - 1$ cm.

n, malas garums, cm	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2n-1$	1	3	5	7	9	$\cdots$
vienības trijstūru skaits	1	4	9	16	25	$\cdots$

Varam pamanīt (un pierādīt) to, ka vienības trijstūru skaits regulārā trijstūri ar malas garumu n cm ir n^2. Varam arī apskatīt vienības trijstūru skaita pieauguma atlikumu pēc dalījuma ar 3. Jebkurā gadījumā - pamanīsim, ka tikai katrs trešais (sākot ar $n = 3$) garums dod vienības trijstūru skaitu, kas dalās ar 3. Ja $n = 3$, to samērā viegli varam sagriezt dotajās trapecēs. Savukārt visiem citiem n, kas dalās ar 3, attiecīgo trijstūri varam sagriezt regulāros trijstūros ar malas garumu 3 cm, ko jau mākam sagriezt prasītajās trapecēs.

14. Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:

a) vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilsošu laimestu;

b) vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.

Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?

Atrisinājums:

Es vēlos pēc iespējas lielāku laimestu, tādēļ no pieejamajiem skaitļiem vienmēr izvēlēšos lielāko. Savukārt Neša kungs vēlas izmaksāt mazāko iespējamo laimestu, tādēļ izvēlēsies mazāko no pieejamajiem skaitļiem. Variantā a) es izvēlēšos katras rindiņas lielāko skaitli (tātad tas būs vismaz tikpat liels kā jebkurš cits skaitlis šajā rindiņā). Tad Neša kungs izvēlēsies mazāko no šiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis A rindā i. Savukārt variantā b) Neša kungs izvēlētos katras kolonnas mazāko skaitli (tas būs ne lielāks kā jebkurš cits skaitlis tajā kolonnā), un es pēc tam - lielāko no izvēlētajiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis B kolonnā j. Tagad apskatām skaitli C, kas atrodas rindā i un kolonnā j (iespējams, ka tas ir tas pats, kas A vai B). Tad $A \geq C$, jo A ir lielākais rindā i, līdzīgi $C \geq B$, jo B ir mazākais kolonnā j. No tā seko $A \geq C \geq B$, tātad $A \geq B$ - laimests variantā a) ir vismaz tikpat liels kā variantā b). Tādēļ variants a) ir izdevīgāks.

15. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru k-to monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Pie kādām k vērtībām Renārs apgriezīs visas monētas?

Atrisinājums:

Apskatīsim tās k vērtības, pie kurām Renars neapgriezīs visas monētas. Attiecīgi tas nozīmē, ka pie pirmajām 2013 apgriešanām vismaz viena monēta būs apgriezta 2 reizes. Pieņemsim, ka tā ir kāda m-tā monēta. Lai to vēlreiz apgrieztu var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g < 2013$). Tad $m + k \cdot g = m + 2013a$ un $k = 2013a/g$. Lai k būtu vesels skaitlis, zinot, ka $g < 2013$, k ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013. Skaitli 2013 pirmreizinātājos izsakām kā $3 \cdot 11 \cdot 61$. Tātad šādiem k netiks apgrieztas visas monētas:

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 2007, 2010, 2013;$$

$$11, 22, 33, \ldots, 1991, 2002, 2013;$$

$$61, 122, 183, \ldots, 1891, 1952, 2013.$$

Tiešām, var pārliecināties: ja kādam no šie skaitļiem, piemēram, s, lielākais kopīgais dalītājs ar 2013 ir L ($L > 1$), tad pirmo reizi 2013. monēta tiks apgriezta pēc $2013/L$ griešanām un otro reizi pēc $2 \cdot 2013/L$ griešanām. Skaidrs arī, ka $2 \cdot 2013/L < 2013$, tādēļ pie dotajiem k pirmajās 2013 apgriešanās vismaz viena monēta būtu jāapgriež 2 reizes un griešana apstātos, tātad visas 2013 monētas netiktu apgrieztas. Esam pierādījuši, ka visas monētas netiks apgrieztas tad un tikai tad, ja k ir vismaz viens kopīgs dalītājs ar 2013. Pie visām atlikušajām k vērtībam monētas tiks apgrieztas.