atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Edgaram ir divas *Credit Suisse* norēķinu kartes. Par skaidras naudas izņemšanu ārzemēs ar *Maestro* karti komisija ir 5 Šveices franki + 0.5% no izņemtās summas. Savukārt *Master* kartei komisija ir 4% no izņemtās summas, bet ne mazāk kā 10 franki. Ar kuru karti ir izdevīgāk izņemt skaidru naudu?

Atrisinājums:
Ja izņemtā summa ir līdz 250CHF, tad *Maestro* komisija ir mazāka par $5+0.005\cdot 250 = 6.25$CHF, kamēr *Master* komisija ir 10CHF (jo $0.04 \cdot 250 = 10$, un mazākām summām sanāktu mazāk par 10, tātad iedarbojas minimālā komisija 10CHF). Savukārt, ja izņemtā summa ir lielāka par 250CHF, piemēram $250 + x$ franki, tad jāmaksā iepriekšējās komisijas plus $0.005x$ un $0.04x$, izmantojot attiecīgi *Maestro* un *Master* karti. Tātad abos gadījumos izdevīgāka komisija ir *Maestro*.

2. Vispārējās negācijas, kas piemeklējušas Latvijas metalurģijas flagmani un izpaužas kā strauja ražošanas apjoma samazināšanās un nespēja tikt galā ar savām saistībām, izraisījušas straujas uzņēmuma akciju cenas svārstības. 2013. gada 12. aprīlī kompānijas akcijas cena nokritās par 86%, bet nākamajā dienā pieauga par $85,43$%. Vai akciju vērtība tādējādi atgriezās ļoti tuvu (± 3%) sākotnējai vērtībai, pirms dotajām svārstībām?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka metalurģijas uzņēmuma akciju cena sākotnēji bija x. Tad 12. aprīlī tā nokritās uz $(1-0.86)x = 0.14x$. Savukārt nākamajā dienā, tai pieaugot par $85,43$%, tā palielinājās uz $0.14x \cdot (1 + 0.8543) \approx 0.26x$. Tātad tā neatgriezās ļoti tuvu sākotnējai vērtībai, lai gan cenas pieaugums procentuāli bija gandrīz tāds pats kā kritums.

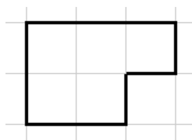
3. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21-21-28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

4. Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

5. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



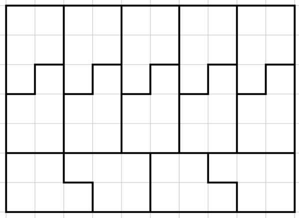
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

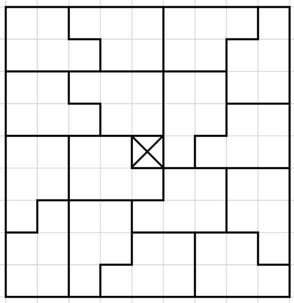
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



6. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

7. Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas F = *fokusa attālums / atvēruma diametrs*, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk ieplūstošās gaismas. Ieplūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.

Slēdža ātrums sek.	**1/125**	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvērums	**F5.6**	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	**200**	?	400	100	200	?

Atrisinājums:
ISO 400, F7.8, 1/250 sek., F2.8, ISO 800.

8. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

9. Plaknē doti trīs punkti. Kā, izmantojot cirkuli un lineālu bez atzīmēm, var konstruēt riņķa līniju, kas satur visus šos trīs punktus? Pamatojiet, kāpēc konstrukcija strādā.

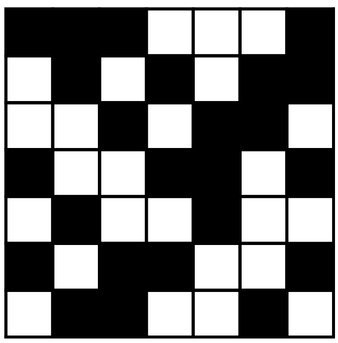
Atrisinājums:
Šīs riņķa līnijas centrs atradīsies tā trijstūra vidusperpendikulu krustpunktā, kura virsotnes ir atzīmētajos punktos. Lai atrastu šo punktu:

a) savienojam punktus, izveidojot trīs nogriežņus,
b) izvēlamies noteiktu rādiusu (piemēram, garākās malas garumu) un ar šo rādiusu uzzīmējam trīs riņķa līnijas ar centriem attiecīgi atzīmētajos punktos,
c) katrām divām riņķa līnijām novelkam taisni caur to krustpunktiem (novilktās taisnes ir trijstūra vidusperpendikuli, ko var pierādīt, izmantojot vienādsānu trijstūrus),
d) taišņu krustpunktā atrodas meklētās riņķa līnijas centrs - velkot riņķa līniju caur kādu no dotajiem punktiem, iegūsim prasīto riņķa līniju (šo var pierādīt, piemēram, izmantojot vienādos taisnleņķa trijstūrus).

10. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;
b) $n = 7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



11. Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **10.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n, kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)

Atrisinājums:
Abos gadījumos atbilde ir $n = 7$. Vienā dienā ir $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekundes, nedēļā $604800 \approx 6 \cdot 10^5$ sekundes. Tātad varam pārbaudīt aptuveni $6 \cdot 10^{14}$ krāsojumu. 7×7 kvadrātam ir

$$2^{49} = 2^{50}/2 = (2^{10})^5/2 \approx (10^3)^5/2 = 5 \cdot 10^{14}$$

iespējamie krāsojumi. Tātad tas paņems aptuveni nedēļu. Savukārt 8×8 kvadrātam ir 2^{64} iespējamie krāsojumi, kas ir $2^{15} \approx 32000$ reižu vairāk nekā iepriekš. Vienā gadā ir aptuveni 50 nedēļas, simts gados - ap 5000. Tātad nepietiks laika, lai pārbaudītu visus 8×8 krāsojumus.

12. Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Atrisinājums:
Izmantosim matemātisko indukciju.
Indukcijas bāze: $n = 1$ vienādība izpildās, $1 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$.
Indukcijas solis: Pieņemsim, ka vienādība ir spēkā skaitlim $n - 1$ un pierādīsim skaitlim n.

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 &= (n-1)n(2n-1)/6 + n^2 = n((n-1)(2n-1)/6 + n) \\ &= n((n-1)(2n-1) + 6n)/6 = n(2n^2 - 3n + 1 + 6n)/6 \\ &= n(2n^2 + 3n + 1)/6 = n(n+1)(2n+1)/6. \end{aligned}$$

13. Sacensībās piedalās 2013 motobraucēji, kuri brauc pa 1 km garu apli. Pirmais no motobraucējiem brauc ar ātrumu 1 km/h, otrais motobraucējs brauc ar ātrumu 2 km/h, . . . , 2013. motobraucējs brauc ar ātrumu 2013 km/h. Cik apdzīšanas par apli būs notikušas, kad sacensībās būs pagājusi stunda? Braucējam apdzenot citu par diviem apļiem, skaitām tās kā divas apdzīšanas par apli.

Atrisinājums:
Pēc stundas 2013. motobraucējs būs veicis 2013 apļus, 2012. braucējs 2012 apļus, . . . , 1. braucējs 1 apli. Tātad 2013. braucējs 1. braucēju būs apdzinis par 2012 apļiem (to, ka braucēji finišēja vienlaicīgi, mēs neskaitām par apdzīšanu), 2. braucēju par 2011 apļiem . . . 2012. braucēju par 1 apli. Attiecīgi 2013. braucējs būs veicis

$$2012 + 2011 + 2010 + \ldots + 2 + 1 = 2012(2012 + 1)/2$$

apdzīšanas. Analogi 2012. braucējs būs veicis $2011(2011 + 1)/2$ apdzīšanas, bet k-tais braucējs $(k - 1)k/2$ apdzīšanas. Tātad kopējais apdzīšanu skaits būs vienāds ar

$$\begin{aligned} &2012(2012+1)/2 + 2011(2011+1)/2 + \ldots + 1(1+1)/2 + 0(0+1)/2 \\ &= \left(2012^2 + 2012 + 2011^2 + 2011 + 2010^2 + 2010 + \ldots + 2^2 + 2 + 1^2 + 1\right)/2 \\ &= \left((2012^2 + 2011^2 + 2010^2 + \ldots + 2^2 + 1^2) + (2012 + 2011 + 2010 + \ldots + 2 + 1)\right)/2 \end{aligned}$$

No **12.** uzdevuma $(2012^2 + 2011^2 + 2010^2 + \ldots + 2^2 + 1^2)$ var izteikt kā $2012 \cdot 2013 \cdot (4024 + 1)/6$. Tad meklētā summa būs

$$\begin{aligned} &\left((2012 \cdot 2013 \cdot (4024 + 1))/6 + 2012 \cdot 2013/2\right)/2 \\ =&(2012 \cdot 2013 \cdot (4024 + 4))/6/2 \\ =&(2012 \cdot 2013 \cdot (4024 + 4))/12 \\ =&2012 \cdot 671 \cdot 1007 = 1359502364. \end{aligned}$$

14. Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:

a) vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilsošu laimestu;

b) vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.

Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?

Atrisinājums:
Es vēlos pēc iespējas lielāku laimestu, tādēļ no pieejamajiem skaitļiem vienmēr izvēlēšos lielāko. Savukārt Neša kungs vēlas izmaksāt mazāko iespējamo laimestu, tādēļ izvēlēsies mazāko no pieejamajiem skaitļiem. Variantā a) es izvēlēšos katras rindiņas lielāko skaitli (tātad tas būs vismaz tikpat liels kā jebkurš cits skaitlis šajā rindiņā). Tad Neša kungs izvēlēsies mazāko no šiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis A rindā i. Savukārt variantā b) Neša kungs izvēlētos katras kolonnas mazāko skaitli (tas būs ne lielāks kā jebkurš cits skaitlis tajā kolonnā), un es pēc tam - lielāko no izvēlētajiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis B kolonnā j. Tagad apskatām skaitli C, kas atrodas rindā i un kolonnā j (iespējams, ka tas ir tas pats, kas A vai B). Tad $A \geq C$, jo A ir lielākais rindā i, līdzīgi $C \geq B$, jo B ir mazākais kolonnā j. No tā seko $A \geq C \geq B$, tātad $A \geq B$ - laimests variantā a) ir vismaz tikpat liels kā variantā b). Tādēļ variants a) ir izdevīgāks.

15. Renāram ir 16 kārtis. Ilze izvēlas vienu, iegaumē to un noliek atpakaļ kaudzītē kādā nejaušā vietā, kā arī pasaka savu mīļāko skaitli n ($1 \leq n \leq 16$). Renārs pamīšus sadala kārtis divās vienādās kaudzītēs (tagad un turpmāk - pirmo kārti pirmajā, otro - otrajā, trešo - pirmajā, utt.) un palūdz Ilzei norādīt, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Tālāk Renārs saliek abas kaudzītes kopā un atkal sadala divās citās kaudzītēs, un Ilze norāda, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Šo procesu atkārto vēl divas reizes. Beigās Renārs saliek visas kārtis kopā, uz galda noliek $n-1$ kārti no kaudzītes augšas un kā n-to kārti uz galda uzliek Ilzes kārti. Kā Renārs to izdarīja? Paskaidro un uzraksti skaidru instrukciju, kā realizēt šo kāršu triku.

Atrisinājums:
Apskatīsim zemāk doto tabulu. IV rindā "0" atbilst kārtīm, kas pēc pēdējās (ceturtās) sadalīšanas novietotas augšējā čupiņā, bet "1" - kārtīm, kas novietotas apakšējā čupiņā. Abām šīm kaudzītēm augšējās četras kārtis ir no iepriekšējās dalīšanas augšā novietotās čupiņas. Savukārt katrai no šīm kaudzītēm augšējās divas kārtis ir no 2. dalīšanas augšējās kaudzītes, utt. Šādā veidā varam izveidot tabulu, kas apraksta katrai kārtij (šoreiz sāksim skaitīšanu no nulles - 0., 1., 2., utt.), kurā kaudzītē - augšējā vai apakšējā - tā bija pēc katras dalīšanas. Izrādās, ja no pozīcijai atbilstošajiem cipariem tabulā izveidojam bināru skaitli, pirmajā pozīcijā liekot ciparu no IV rindas, otrajā - no III, trešajā - no II, un pēdējā - no I, iegūstam pozīcijas skaitlim atbilstošu bināro skaitli. Piemēram, 13. pozīcijai iegūstam bināro skaitli 1101, kas atbilst skaitlim 13 decimālajā sistēmā. Tātad, ja vēlamies, lai meklētā kārts būtu 14. pozīcijā (sākot skaitīt no 1) jeb 13. (sākot skaitīt no 0), pārveidojam 13 binārajā skaitīšanas sistēmā (1101) un sākot no labās puses, katrs cipars pasaka priekšā, vai kārts jāliek augšējā (ja cipars ir 0), vai apakšējā kaudzītē (cipars 1). Vispārīgā gadījumā, ja nosaukts skaitlis n, tad $(n-1)$ pārveidojam binārajā skaitīšanas sistēmā un sekojam šim pašam algoritmam.

<table>
<tr><td>Pozīcija</td><td>0.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>13.</td><td>14.</td><td>15.</td></tr>
<tr><td>I</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>II</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>III</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>IV</td><td colspan="8">0</td><td colspan="8">1</td></tr>
</table>

Līdzīgu uzdevumu un tā skaidrojumu angļu valodā var noskatīties
http://numberphile.com/videos/27_card_trick.html