atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. 4 melnās govis un 5 brūnās govis 7 dienās dod tikpat piena, cik 6 melnās govis un 4 brūnās govis 6 dienās. Kurš no govju tipiem ir ražīgāks?

Atrisinājums:
Ar m apzīmēsim melno govju saražoto pienu 1 dienas laikā, bet ar b - brūno govju. Tad

$$(4m + 5b)7 = (6m + 4b)6$$
$$28m + 35b = 36m + 24b$$
$$11b = 8m$$
$$\frac{11}{8}b = m$$

Lai brūno govju ražīgums būtu vienā līmenī ar melno govju ražīgumu, tas jāpalielina $11/8 = 1.375$ reizes. Tātad melnās govis ir ražīgākas.

2. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

3. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi ($18 \leq V \leq 22$). Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\leq V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25 - V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

4. Ja maiņas kurss ir 17 sant. pret 1 poļu zlotu (PLN), ar cik procentu uzcenojumu Irideja.lv piedāvā ievest IKEA preces no Polijas (skat. cenas formulu ilustrācijā)?

Atrisinājums:
Ja cena poļu zlotos jādala ar 4, tad tiek prasīti 25 santīmi par zlotu. Pierēķinot "atlaidi" 8%, iegūstam $25 \cdot 0.92 = 23$ santīmus. Tātad uzcenojums ir $(23-17)/17 = 6/17 \approx 35\%$.

5. Liene brauc piedalīties dizaina izstādē Milānā, un līdzi vēlas paņemt 10×15cm kartītes izdalīšanai. Atļautais bagāžas svars ir 8kg, no tiem 3.5kg sver pati soma, un vēl 2.7kg - drēbes un higiēnas piederumi.

a) Cik kartītes ir iespējams paņemt līdzi, ja tās drukā uz 200g/m^2 papīra?
b) Uz cik smaga papīra varētu drukāt, ja nepieciešamas 1000 kartītes?

Atrisinājums:
Kartītēm paliek 1.8kg.

a) 200g $=$ 0.2kg, 150cm^2 $=$ 0.015m^2. Tātad viena kartīte sver $0.2 \cdot 0.015 = 0.003$kg, un varam paņemt līdzi 600 kartītes.
b) Ja vajadzētu 1000 kartītes, tad būtu jādrukā uz $200 \cdot 600/1000 = 120$g/m^2 papīra.

6. Vispārējās negācijas, kas piemeklējušas Latvijas metalurģijas flagmani un izpaužas kā strauja ražošanas apjoma samazināšanās un nespēja tikt galā ar savām saistībām, izraisījušas straujas uzņēmuma akciju cenas svārstības. 2013. gada 12. aprīlī kompānijas akcijas cena nokritās par 86%, bet nākamajā dienā pieauga par $85,43\%$. Vai akciju vērtība tādējādi atgriezās ļoti tuvu ($\pm 3\%$) sākotnējai vērtībai, pirms dotajām svārstībām?

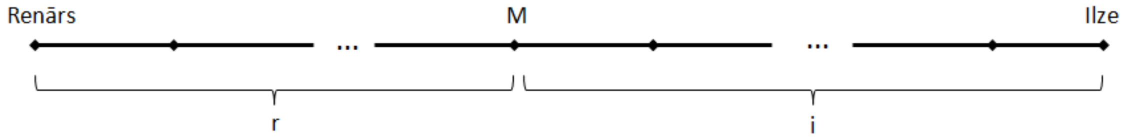
Atrisinājums:
Pieņemsim, ka metalurģijas uzņēmuma akciju cena sākotnēji bija x. Tad 12. aprīlī tā nokritās uz $(1-0.86)x = 0.14x$. Savukārt nākamajā dienā, tai pieaugot par $85,43\%$, tā palielinājās uz $0.14x \cdot (1+0.8543) \approx 0.26x$. Tātad tā neatgriezās ļoti tuvu sākotnējai vērtībai, lai gan cenas pieaugums procentuāli bija gandrīz tāds pats kā kritums.

7. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21-21-28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

8. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n+1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu "attālums" līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r + i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu "attāluma" attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi.



Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r + i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r + i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r + i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r + i = 1$).

9. Ir prognozēts, ka turpmāk katru gadu kādos 3 no 6 lielākajiem Marsa krāteriem iekritīs pa vienai Baltijas kosmosa zondei. Viltīgais Baltijas Kosmosa asociācijas prezidents paziņoja, ka krāterus no zondēm iztīrīs tikai tad, kad to varēs izdarīt visefektīvāk, t.i., kad katrā no 6 krāteriem gada beigās būs vienāds zonžu skaits. Vai 6 lielākie Marsa krāteri tiks kādreiz iztīrīti, ja tajos jau tagad kopā iekritušas 8 zondes?

Atrisinājums:
Lai Marsa krāterus varētu iztīrīt, tajos zonžu skaitam jābūt vienādam, no kā seko, ka kopējam zonžu skaitam jādalās ar 6. Apskatīsim zonžu kopējo skaitu krāteros gada beigās pēc g gadiem ($g = 0, 1, 2, 3...$) - tas būs $8 + 3g$ jeb $3(g + 2) + 2$. Tātad tas nedalīsies ar 3 un tādēļ nedalīsies arī ar 6 ne pie kādiem g. Krāteri nekad netiks iztīrīti.

10. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

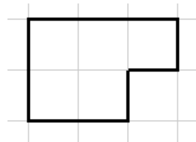
a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?
b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?
c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?
d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341 + 579 = 920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920 - 12 = 908$.
b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908 + 7940 = 8848$.
c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62 + 68 - 7 = 123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940 - 123 = 7817$.
d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341 - 12 = 329$.

11. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



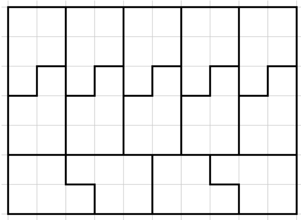
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

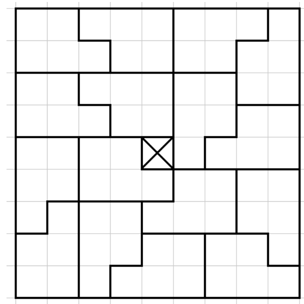
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



12. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:

Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

13. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzimējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

$$f_i(x_k) \leq \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j) \qquad \forall i,k$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) \leq \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j) \quad \forall k$$

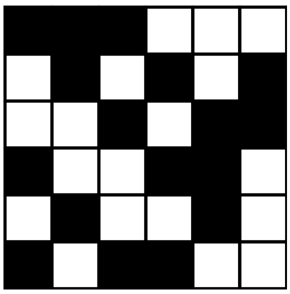
$$\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) \leq \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j).$$

14. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 6$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 6$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



15. Sacensībās piedalījās 2013 riteņbraucēji. Tie uzsāka sacensības viens pēc otra ar individuālu startu, un katrs no tiem brauca ar nemainīgu ātrumu (tas var atšķirties starp braucējiem). Vai varēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes? (Braucēji, kurus apdzen, arī piedalās apdzīšanā.) *Padoms:* Apskati pirmo un pēdējo startu!

Atrisinājums:
Pirmajam braucējam uzsākot sacensības, tam priekšā neviena nav. Tātad viņš nevienu neapdzīs. Bet, lai viņš piedalītos 1006 apdzīšanās, viņu apdzina tieši 1006 reizes, kas nozīmē, ka viņš finišēja kā 1007. Savukārt aiz pēdējā braucēja neviens neatradās, un neviens viņu apdzīt nevarēja, tātad viņš pats apdzina tieši 1006 braucējus un attiecīgi finišēja 1007. vietā. Sanāk, ka bija divi braucēji, kas braucienu beidza ar vienu un to pašu kārtas numuru, kas nav iespējams. Tādēļ nevarēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes.

atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Cik reižu diennaktī pulksteņa minūšu un stundu rādītāji pārklājas jeb apdzen viens otru?

Atrisinājums:
Katrā stundā minūšu rādītājs stundu rādītāju noķer un apdzen vienu reizi. Bet pēc plkst. 11 minūšu rādītājs stundu rādītāju noķer, tam esot tieši uz divpadsmitiem, tādēļ starp plkst. 12 un 13 tas stundu rādītāju vēl nespēs noķert. Tātad divpadsmit stundu ciklā stundu rādītāju apdzīs 11 reizes, bet 24 stundu ciklā 22 reizes.

2. Ja maiņas kurss ir 17 sant. pret 1 poļu zlotu (PLN), ar cik procentu uzcenojumu Irideja.lv piedāvā ievest IKEA preces no Polijas (skat. cenas formulu ilustrācijā)?

Atrisinājums:
Ja cena poļu zlotos jādala ar 4, tad tiek prasīti 25 santīmi par zlotu. Pierēķinot "atlaidi" 8%, iegūstam $25 \cdot 0.92 = 23$ santīmus. Tātad uzcenojums ir $(23 - 17)/17 = 6/17 \approx 35\%$.

3. Liene brauc piedalīties dizaina izstādē Milānā, un līdzi vēlas paņemt 10×15cm kartītes izdalīšanai. Atļautais bagāžas svars ir 8kg, no tiem 3.5kg sver pati soma, un vēl 2.7kg - drēbes un higiēnas piederumi.

a) Cik kartītes ir iespējams paņemt līdzi, ja tās drukā uz 200g/m^2 papīra?

b) Uz cik smaga papīra varētu drukāt, ja nepieciešamas 1000 kartītes?

Atrisinājums:
Kartītēm paliek 1.8kg.

a) 200g = 0.2kg, 150cm^2 = 0.015m^2. Tātad viena kartīte sver $0.2 \cdot 0.015 = 0.003$kg, un varam paņemt līdzi 600 kartītes.

b) Ja vajadzētu 1000 kartītes, tad būtu jādrukā uz $200 \cdot 600/1000 = 120$g/m^2 papīra.

4. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?

b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?

c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?

d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341 + 579 = 920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920 - 12 = 908$.

b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908 + 7940 = 8848$.

c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62 + 68 - 7 = 123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940 - 123 = 7817$.

d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341 - 12 = 329$.

5. Ir prognozēts, ka turpmāk katru gadu kādos 3 no 6 lielākajiem Marsa krāteriem iekritīs pa vienai Baltijas kosmosa zondei. Viltīgais Baltijas Kosmosa asociācijas prezidents paziņoja, ka krāterus no zondēm iztīrīs tikai tad, kad to varēs izdarīt visefektīvāk, t.i., kad katrā no 6 krāteriem gada beigās būs vienāds zonžu skaits. Vai 6 lielākie Marsa krāteri tiks kādreiz iztīrīti, ja tajos jau tagad kopā iekritušas 8 zondes?

Atrisinājums:
Lai Marsa krāterus varētu iztīrīt, tajos zonžu skaitam jābūt vienādam, no kā seko, ka kopējam zonžu skaitam jādalās ar 6. Apskatīsim zonžu kopējo skaitu krāteros gada beigās pēc g gadiem ($g = 0, 1, 2, 3...$) - tas būs $8 + 3g$ jeb $3(g + 2) + 2$. Tātad tas nedalīsies ar 3 un tādēļ nedalīsies arī ar 6 ne pie kādiem g. Krāteri nekad netiks iztīrīti.

6. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

7. Sestdienas rītā Mārtiņs apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

8. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:

Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \ldots, 10\}$ un $y \in \{0, \ldots, 5\}$.

a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \ldots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10 - x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5 - y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9}(10 - x)\right) \times \left(\sum_{y=0}^{4}(5 - y)\right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

9. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:

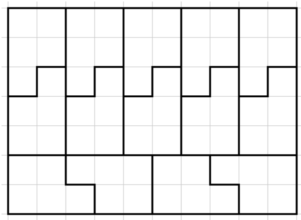
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

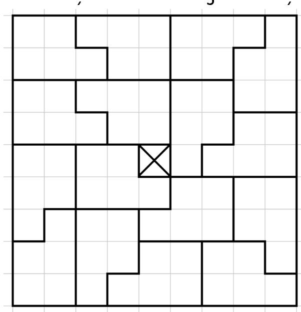
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



10. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzimējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

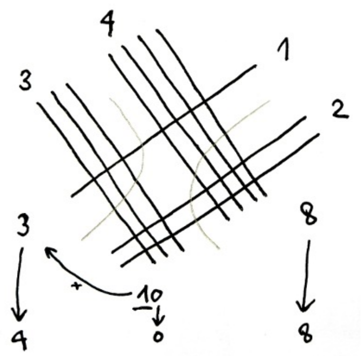
$$\begin{aligned} f_i(x_k) &\le \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \qquad \forall i,k \\ \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j) \quad \forall k \\ \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\le \sum_{i=1}^{m} \max_{1\le j\le n} f_i(x_j). \end{aligned}$$

11. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

12. Zīmējumā parādīts, kā aprēķināt $12 \times 34 = 408$, izmantojot japāņu reizināšanu. Izskaidrot, kā šī metode darbojas!



Atrisinājums:
Novelkam līnijas atbilstoši katra reizinātāja vienu un desmitu ciparam. Vienu ciparu līniju kruspunktu skaits būs rezultāta vienu cipars. Vienu un desmitu, kā arī desmitu un vienu ciparu līniju krustpunktu skaits būs rezultāta desmitu cipars. Visbeidzot, desmitu ciparu līniju kruspunktu skaits būs simtu cipars. Ja kāds no skaitiem sanāk lielāks par 9, tad veicam pārnešanu. Ar simboliem:

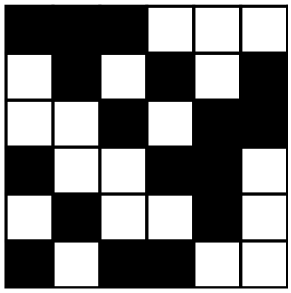
$$\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd.$$

13. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;

b) $n = 6$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 6$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



14. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru 1987. monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Vai šajā brīdī visas monētas ir apgrieztas?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ir kāda m-tā monēta, kura būtu jāgriež otro reizi (pie kuras apstāsies griešana), pirms ir apgrieztas visas 2013 monētas. Ja tā jāgriež otrreiz, var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g < 2013$). Tad $m + 1987g = m + 2013a$ un $1987 = 2013a/g$. Tā kā $g < 2013$, tad 1987 ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013, bet tā nav, jo 1987 ir pirmskaitlis. Tātad, griežot katru 1987. monētu, visas monētas tiks apgrieztas.

15. Sacensībās piedalījās 2013 riteņbraucēji. Tie uzsāka sacensības viens pēc otra ar individuālu startu, un katrs no tiem brauca ar nemainīgu ātrumu (tas var atšķirties starp braucējiem). Vai varēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes? (Braucēji, kurus apdzen, arī piedalās apdzīšanā.) *Padoms:* Apskati pirmo un pēdējo startu!

Atrisinājums:
Pirmajam braucējam uzsākot sacensības, tam priekšā neviena nav. Tātad viņš nevienu neapdzīs. Bet, lai viņš piedalītos 1006 apdzīšanās, viņu apdzina tieši 1006 reizes, kas nozīmē, ka viņš finišēja kā 1007. Savukārt aiz pēdējā braucēja neviens neatradās, un neviens viņu apdzīt nevarēja, tātad viņš pats apdzina tieši 1006 braucējus un attiecīgi finišēja 1007. vietā. Sanāk, ka bija divi braucēji, kas braucienu beidza ar vienu un to pašu kārtas numuru, kas nav iespējams. Tādēļ nevarēja gadīties, ka katrs no braucējiem piedalījās apdzīšanā tieši 1006 reizes.

atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

2. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi ($18 \leq V \leq 22$). Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\leq V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25-V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

3. Edgaram ir divas *Credit Suisse* norēķinu kartes. Par skaidras naudas izņemšanu ārzemēs ar *Maestro* karti komisija ir 5 Šveices franki + 0.5% no izņemtās summas. Savukārt *Master* kartei komisija ir 4% no izņemtās summas, bet ne mazāk kā 10 franki. Ar kuru karti ir izdevīgāk izņemt skaidru naudu?

Atrisinājums:
Ja izņemtā summa ir līdz 250CHF, tad *Maestro* komisija ir mazāka par $5+0.005{\cdot}250 = 6.25$CHF, kamēr *Master* komisija ir 10CHF (jo $0.04 \cdot 250 = 10$, un mazākām summām sanāktu mazāk par 10, tātad iedarbojas minimālā komisija 10CHF). Savukārt, ja izņemtā summa ir lielāka par 250CHF, piemēram $250 + x$ franki, tad jāmaksā iepriekšējās komisijas plus $0.005x$ un $0.04x$, izmantojot attiecīgi *Maestro* un *Master* karti. Tātad abos gadījumos izdevīgāka komisija ir *Maestro*.

4. Dota informatīva tabula par pašvaldību vēlēšanu kandidātu pazīmēm. Nav tādu kandidātu, kuriem attiecīgās pašvaldības teritorijā nav īpašuma un kuri tajā ne dzīvo, ne strādā.

a) Cik daudz kandidātu nedzīvo attiecīgajā pašvaldībā?
b) Cik daudz kandidātu kopumā pieteikušies vēlēšanās?
c) Cik daudz kandidātu dzīvo pašvaldībā, bet tur nepieder īpašumi, un tur nestrādā?
d) Cik daudz ir kandidātu, kam pašvaldībā ir tikai īpašums?

Dzīvo	7940
Dzīvo, ir īpašums	62
Dzīvo, strādā	68
Dzīvo, strādā, ir īpašums	7
Nedzīvo, bet ir īpašums	341
Nedzīvo, bet strādā	579
Tikai strādā un ir īpašums	12

Atrisinājums:

a) Saskaitot priekšpēdējās divas rindiņas, iegūstam $341 + 579 = 920$. Bet šajos kandidātos divreiz ieskaitīti tie, kas nedzīvo, bet ir īpašums un strādā pašvaldības teritorijā. Tātad atņemot iegūstam $920 - 12 = 908$.

b) Tiem, kas nedzīvo pašvaldībā, pieskaitām tos, kas dzīvo, un iegūstam $908 + 7940 = 8848$.

c) Vispirms aprēķināsim, cik kandidātu dzīvo pašvaldībā, un vai nu strādā, vai ir īpašums: $62 + 68 - 7 = 123$ (līdzīgi kā iepriekš, atņemam divreiz pieskaitītos). Tad tos atņemam no kopējā dzīvojošo skaita, $7940 - 123 = 7817$.

d) No tiem, kas nedzīvo un kam ir īpašums, atņemam tos, kas nedzīvo, bet strādā un ir īpašums: $341 - 12 = 329$.

5. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21 - 21 - 28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

6. Klasē ir n puiši un m meitenes. Katra meitene novērtēja katru puisi ar $1 - 10$ punktiem. Tad viņas mēģināja izlemt, kā labāk taisīt balli:

a) aicināt tikai to puisi, kurš kopā ieguvis visvairāk punktu (ja tādi ir vairāki, izvēlas vienu);

b) aicināt tos puišus, kuri kādai no meitenēm patikuši vislabāk.

Katrai meitenei pienākas deja ar vienu no uzaicinātajiem puišiem, pēc izvēles. Saskaitām punktus, ko katra meitene bija iedevusi savam dejas partnerim. Pierādīt, ka variantā b) punktu kopsumma būs vismaz tikpat liela kā variantā a).

Atrisinājums:
Skaidrs, ka punkti, ko jebkura meitene bija iedevusi variantā a) uzaicinātajam puisim (kurš būtu vienīgais iespējamais dejas partneris) nebija augstāki kā viņas favorītam. Tātad, saskaitot visu meiteņu iedodos punktus savam dejas partnerim, iegūsim skaitli, kas nav lielāks par katras meitenes favorītu punktu summu (varianta b) punktu kopsumma) - jo tad katra meitene varētu dejot ar savu favorītu). Matemātiski, apzīmējot ar $f_i(x_j)$ meitenes i novērtējumu puisim j,

$$\begin{aligned} f_i(x_k) &\leq \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j) \qquad \forall i, k \\ \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\leq \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j) \quad \forall k \\ \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) &\leq \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} f_i(x_j). \end{aligned}$$

7. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:

Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \dots, 10\}$ un $y \in \{0, \dots, 5\}$.

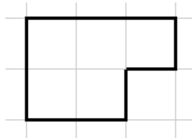
a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \dots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10 - x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5 - y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9} (10 - x) \right) \times \left(\sum_{y=0}^{4} (5 - y) \right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

8. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



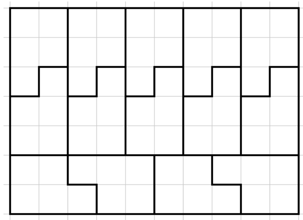
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

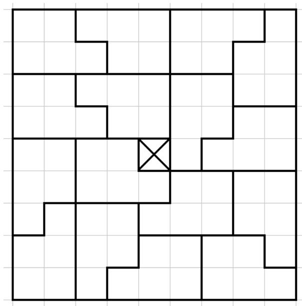
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



9. Latvijā bērniem obligāti jāpabeidz pamatskola. Šobrīd uz profesionālajām izglītības iestādēm aiziet 36% jauniešu pēc 9.klases beigšanas. Pieņemsim, ka visi pārējie turpina mācības vidusskolā ("izglītība pēc 9.klases beigšanas būtu noteikti jāturpina, jo palikšana ar šādu izglītības līmeni ir drošākais ceļš uz bezdarbnieku rindām," BNS). 9% vidusskolēnu dažādu iemeslu dēļ pārtrauc mācības un aiziet no vidusskolas. 37% vidusskolu absolventu neturpina mācības augstskolā. Balstoties uz doto informāciju (un izskaidrojot savus papildu pieņēmumus), aprēķināt, cik procentiem cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

Atrisinājums:
Lai aprēķinātu šo īpatsvaru, būs nepieciešami vairāki pieņēmumi, piemēram, ka darbspējas vecums ir no 15-64 gadiem, un visi cilvēki šajā intervālā izdzīvo. Vēl, ka minētie procenti, kā arī dzimstība, ir bijuši nemainīgi vismaz pēdējos 64 gadus. Pieņemsim arī, ka 70% augstskolu studentu iegūst augstāko izglītību, turklāt tieši 22 gadu vecumā. Balstoties uz šiem pieņēmumiem iegūstam, ka starp cilvēkiem, kas ir vismaz 22 gadus veci, augstākā izglītība ir

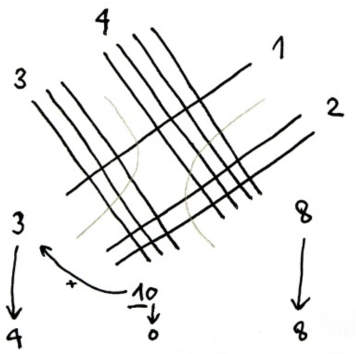
$$100\% \cdot (1-0.36) \cdot (1-0.09) \cdot (1-0.37) \cdot 0.70 = 0.64 \cdot 0.91 \cdot 0.63 \cdot 0.70 \approx 26\%$$

Vēl no pieņēmumiem izriet, ka darbspējīgo cilvēku vidū tādi, kas ir vismaz 22 gadus veci ir $(64-21)/(64-14) = 43/50 = 86\%$. Līdz ar to, pēc mūsu aplēsēm $0.86 \cdot 0.26 \approx 22\%$ cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

10. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

11. Zīmējumā parādīts, kā aprēķināt $12 \times 34 = 408$, izmantojot japāņu reizināšanu. Izskaidrot, kā šī metode darbojas!



Atrisinājums:
Novelkam līnijas atbilstoši katra reizinātāja vienu un desmitu ciparam. Vienu ciparu līniju kruspunktu skaits būs rezultāta vienu cipars. Vienu un desmitu, kā arī desmitu un vienu ciparu līniju krustpunktu skaits būs rezultāta desmitu cipars. Visbeidzot, desmitu ciparu līniju kruspunktu skaits būs simtu cipars. Ja kāds no skaitiem sanāk lielāks par 9, tad veicam pārnešanu. Ar simboliem:

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a+b)(10c+d) = 100ac + 10(ad+bc) + bd.$$

12. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n+1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu "attālums" līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r+i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu "attāluma" attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi.

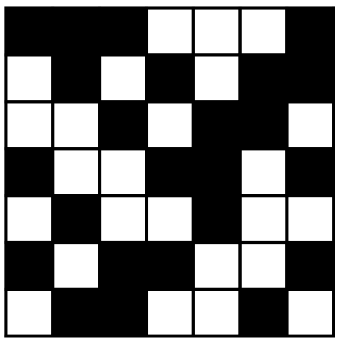
Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r+i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r+i=1$).

13. Vai ir iespējams izkrāsot $n\times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k\times k$ apakškvadrātu ($2\le k\le n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n=4$;

b) $n=7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n=7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



14. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru 1987. monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Vai šajā brīdī visas monētas ir apgrieztas?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ir kāda m-tā monēta, kura būtu jāgriež otro reizi (pie kuras apstāsies griešana), pirms ir apgrieztas visas 2013 monētas. Ja tā jāgriež otrreiz, var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g<2013$). Tad $m+1987g=m+2013a$ un $1987=2013a/g$. Tā kā $g<2013$, tad 1987 ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013, bet tā nav, jo 1987 ir pirmskaitlis. Tātad, griežot katru 1987. monētu, visas monētas tiks apgrieztas.

15. Kādi ir iespējamie vienādmalu trijstūra malas garumi, ja zināms, ka to var sagriezt vienādsānu trapecēs, kuru viena pamata garums ir 2 cm, bet pārējās malas ir 1 cm garas.

Atrisinājums:
Var pamanīt un pierādīt, ka aprakstītās trapeces leņķi ir $60°$ un $120°$ un visas griezuma līnijas būs paralēlas sākotnējā vienādmalu trijstūra malām. Tātad varam sadalīt sākotnējo trijstūri regulāros trijstūros ar malas garumu 1 cm. Katra trapece sastāv no trīs šādiem trijstūriem. Savukārt regulārā trijstūrī ar malas garumu n cm ir par $2n-1$ šādu trijstūru vairāk nekā trijstūri ar malas garumu $n-1$ cm.

n, malas garums, cm	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2n-1$	1	3	5	7	9	$\cdots$
vienības trijstūru skaits	1	4	9	16	25	$\cdots$

Varam pamanīt (un pierādīt) to, ka vienības trijstūru skaits regulārā trijstūri ar malas garumu n cm ir n^2. Varam arī apskatīt vienības trijstūru skaita pieauguma atlikumu pēc dalījuma ar 3. Jebkurā gadījumā - pamanīsim, ka tikai katrs trešais (sākot ar $n=3$) garums dod vienības trijstūru skaitu, kas dalās ar 3. Ja $n=3$, to samērā viegli varam sagriezt dotajās trapecēs. Savukārt visiem citiem n, kas dalās ar 3, attiecīgo trijstūri varam sagriezt regulāros trijstūros ar malas garumu 3 cm, ko jau mākam sagriezt prasītajās trapecēs.

atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

10. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m^2 līdz 70m^2. Kāds ir cenas par kvadrātmetru (Ls/m^2) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?

Atrisinājums:
Ja dzīvokļa cena ir intervālā $[20\,000; 40\,000]$ Ls un platībā intervālā $[45; 70]$ m^2, tad cenas par kvadrātmetru intervāls būs $[20\,000/70;\ 40\,000/45] \approx [286; 889]$ Ls/m^2. Vislielākā kvadrātmetra cena būs pie vismazākās pieļautās platības un vislielākās cenas, un vismazākā kvadrātmetra cena būs pie vislielākās dzīvokļa platības un vismazākās cenas.

2. Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?

Atrisinājums:
Ilze ar bērnu auklēšanu nodarbojās no 18 līdz 22 gadu vecumam. Apskatīsim, kāds varēja būt bērna vecums, kad Ilzei bija V gadi ($18 \leq V \leq 22$). Bērna vecums nevarēja būt vairāk par pusi no Ilzes vecuma, tātad $\leq V/2$. Savukārt tagad, kad Ilzei ir 25 gadi, bērns ir pieaudzis par $25-V$ gadiem līdz ar to viņa vecums nevar būt lielāks par $V/2 + 25 - V = 25 - V/2$. Bērna vecums šobrīd, kad Ilzei ir 25 gadi, būtu vislielākais tad, ja Ilze viņu auklēja, būdama iespējami jauna, t.i. 18 gados. Secinām, ka lielākais iespējamais bērna vecums šobrīd ir $18/2 + 7 = 16$ gadi.

3. Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

4. Cik veidos uz 5×10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri ABC, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē A ir taisns leņķis, un mala AC ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,

a) ja virsotnes ABC nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;

b) ja virsotnes var būt jebkādā secībā?

Atrisinājums:
Izmantosim koordinātu sistēmu, kur $x \in \{0, \ldots, 10\}$ un $y \in \{0, \ldots, 5\}$.

a) Virsotne C var būt pa kreisi vai pa labi no A, tad B ir attiecīgi uz leju vai uz augšu no A. Apskatīsim tikai otro gadījumu, jo simetrijas dēļ pirmajā būs tikpat trijstūru. Tātad virsotne C ir pa labi no A un B ir uz augšu no A. Virsotnes A x koordinātai ir 10 iespējamas vērtības $\{0, \ldots, 9\}$, y koordinātai - 5. Pieņemot, ka A ir punktā (x, y), virsotnei C iespējami $10-x$ varianti, un virsotnei B iespējami $5-y$. Tādēļ iespējamo trijstūru skaits ir

$$2 \times \left(\sum_{x=0}^{9}(10-x)\right) \times \left(\sum_{y=0}^{4}(5-y)\right) = 2 \times \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right) \times \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right) = 2 \cdot 55 \cdot 15 = 1650.$$

b) Šoreiz virsotnes A x koordinātai iespējamas 11 vērtības, virsotnei C - jebkura no 10 pārējām. Virsotnes A y koordinātai iespējamas 6 vērtības, B - viena no 5 atlikušajām. Tātad šoreiz iespējami $(11 \cdot 10) \times (6 \cdot 5) = 825 \cdot 4 = 3300$ trijstūri.

Gadījumu a) iespējams atrisināt arī, gadījuma b) rezultātu un dalot ar 2, jo spoguļsimetrijas dēļ trijstūri ar virsotnēm ABC pa pulksteni iespējami tikpat daudzi, cik pret.

5. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

6. Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas F = *fokusa attālums* / *atvēruma diametrs*, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk ieplūstošās gaismas. Ieplūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.

Slēdža ātrums sek.	**1/125**	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvērums	**F5.6**	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	**200**	?	400	100	200	?

Atrisinājums:
ISO 400, F7.8, 1/250 sek., F2.8, ISO 800.

7. Latvijā bērniem obligāti jāpabeidz pamatskola. Šobrīd uz profesionālajām izglītības iestādēm aiziet 36% jauniešu pēc 9.klases beigšanas. Pieņemsim, ka visi pārējie turpina mācības vidusskolā ("izglītība pēc 9.klases beigšanas būtu noteikti jāturpina, jo palikšana ar šādu izglītības līmeni ir drošākais ceļš uz bezdarbnieku rindām," BNS). 9% vidusskolēnu dažādu iemeslu dēļ pārtrauc mācības un aiziet no vidusskolas. 37% vidusskolu absolventu neturpina mācības augstskolā. Balstoties uz doto informāciju (un izskaidrojot savus papildu pieņēmumus), aprēķināt, cik procentiem cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

Atrisinājums:
Lai aprēķinātu šo īpatsvaru, būs nepieciešami vairāki pieņēmumi, piemēram, ka darbspējas vecums ir no 15-64 gadiem, un visi cilvēki šajā intervālā izdzīvo. Vēl, ka minētie procenti, kā arī dzimstība, ir bijuši nemainīgi vismaz pēdējos 64 gadus. Pieņemsim arī, ka 70% augstskolu studentu iegūst augstāko izglītību, turklāt tieši 22 gadu vecumā. Balstoties uz šiem pieņēmumiem iegūstam, ka starp cilvēkiem, kas ir vismaz 22 gadus veci, augstākā izglītība ir

$$100\% \cdot (1 - 0.36) \cdot (1 - 0.09) \cdot (1 - 0.37) \cdot 0.70 = 0.64 \cdot 0.91 \cdot 0.63 \cdot 0.70 \approx 26\%$$

Vēl no pieņēmumiem izriet, ka darbspējīgo cilvēku vidū tādi, kas ir vismaz 22 gadus veci ir $(64 - 21)/(64 - 14) = 43/50 = 86\%$. Līdz ar to, pēc mūsu aplēsēm $0.86 \cdot 0.26 \approx 22\%$ cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

8. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

9. Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n, tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n+1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdzi Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.

Atrisinājums:
Apskatīsim cilvēku M, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais. Pieņemsim, ka viņa rokas spiedienu "attālums" līdz Renāram ir r, bet līdz Ilzei i, tātad viņa Renāra-Ilzes skaitlis ir $r+i$. Skatīt zemāk grafisku šo rokas spiedienu "attāluma" attēlojumu (līnija apzīmē vienu rokas spiedienu, rombi - cilvēkus). Tas ir visīsākis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi.

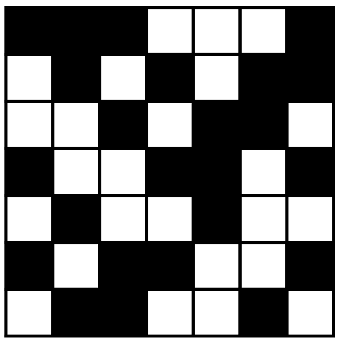
Renāra paša skaitis ir 0, bet viņa Ilzes skaitlis būs $r+i$, jo tas ir visīsakis rokas spiedienu "ceļš" starp Renāru un Ilzi, un attiecīgi viņa Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Analogi arī Ilzes Renāra-Ilzes skaitlis būs $r+i$. Tātad nebūs viens vienīgs cilvēks ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli (var gadīties, ka šis īsākais ceļš sastāv tikai no Renāra un Ilzes, un viņi ir divi vienīgie ar vismazāko Renāra-Ilzes skaitli, t.i. $r+i=1$).

10. Pierādīt, ka, aprēķinot harmonisko summu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$ pietiekami lielam N, mēs varēsim pārsniegt jebkuru prasīto skaitli.
Padoms: salīdzini šo summu ar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$.

Atrisinājums:
Izmantojam padomu un ievērojam: ja mēs izlaižam pirmo locekli $1/1$ no harmoniskās summas, tad katrs nākamais summas loceklis ir vismaz tikpat liels, kā atbilstošais loceklis "padoma" summā. Ievērosim arī, ka padoma summā pirmais loceklis ir $1/2$, nākamie divi kopā veido $1/2$, nākamie četri kopā atkal veido $1/2$, ..., nākamie 2^{n-1} atkal veido $1/2$. Tātad, saskaitot $(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^n - 1$ pirmos locekļus, summā iegūstam $n/2$. Līdz ar to, ja mēs aprēķinām harmonisko summu ar $N = 2^n$, mēs iegūstam vismaz $1/1 + n/2$. Tātad, ja "prasītais" skaitlis, kas jāpārsniedz, ir x, tad izvēloties pietiekami lielu n (piemēram, $n = 2x$), harmoniskā summa ar $N = 2^n$ būs vismaz $x + 1$.

11. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja
a) $n = 4$;
b) $n = 7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



12. Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **11.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n, kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)

Atrisinājums:
Abos gadījumos atbilde ir $n = 7$. Vienā dienā ir $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekundes, nedēļā $604800 \approx 6 \cdot 10^5$ sekundes. Tātad varam pārbaudīt aptuveni $6 \cdot 10^{14}$ krāsojumu. 7×7 kvadrātam ir

$$2^{49} = 2^{50}/2 = (2^{10})^5/2 \approx (10^3)^5/2 = 5 \cdot 10^{14}$$

iespējamie krāsojumi. Tātad tas paņems aptuveni nedēļu. Savukārt 8×8 kvadrātam ir 2^{64} iespējamie krāsojumi, kas ir $2^{15} \approx 32000$ reižu vairāk nekā iepriekš. Vienā gadā ir aptuveni 50 nedēļas, simts gados - ap 5000. Tātad nepietiks laika, lai pārbaudītu visus 8×8 krāsojumus.

13. Kādi ir iespējamie vienādmalu trijstūra malas garumi, ja zināms, ka to var sagriezt vienādsānu trapecēs, kuru viena pamata garums ir 2 cm, bet pārējās malas ir 1 cm garas.

Atrisinājums:
Var pamanīt un pierādīt, ka aprakstītās trapeces leņķi ir 60° un 120° un visas griezuma līnijas būs paralēlas sākotnējā vienādmalu trijstūra malām. Tātad varam sadalīt sākotnējo trijstūri regulāros trijstūros ar malas garumu 1 cm. Katra trapece sastāv no trīs šādiem trijstūriem. Savukārt regulārā trijstūrī ar malas garumu n cm ir par $2n - 1$ šādu trijstūru vairāk nekā trijstūri ar malas garumu $n - 1$ cm.

n, malas garums, cm	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2n-1$	1	3	5	7	9	$\cdots$
vienības trijstūru skaits	1	4	9	16	25	$\cdots$

Varam pamanīt (un pierādīt) to, ka vienības trijstūru skaits regulārā trijstūri ar malas garumu n cm ir n^2. Varam arī apskatīt vienības trijstūru skaita pieauguma atlikumu pēc dalījuma ar 3. Jebkurā gadījumā - pamanīsim, ka tikai katrs trešais (sākot ar $n = 3$) garums dod vienības trijstūru skaitu, kas dalās ar 3. Ja $n = 3$, to samērā viegli varam sagriezt dotajās trapecēs. Savukārt visiem citiem n, kas dalās ar 3, attiecīgo trijstūri varam sagriezt regulāros trijstūros ar malas garumu 3 cm, ko jau mākam sagriezt prasītajās trapecēs.

14. Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:

a) vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilsošu laimestu;

b) vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.

Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?

Atrisinājums:

Es vēlos pēc iespējas lielāku laimestu, tādēļ no pieejamajiem skaitļiem vienmēr izvēlēšos lielāko. Savukārt Neša kungs vēlas izmaksāt mazāko iespējamo laimestu, tādēļ izvēlēsies mazāko no pieejamajiem skaitļiem. Variantā a) es izvēlēšos katras rindiņas lielāko skaitli (tātad tas būs vismaz tikpat liels kā jebkurš cits skaitlis šajā rindiņā). Tad Neša kungs izvēlēsies mazāko no šiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis A rindā i. Savukārt variantā b) Neša kungs izvēlētos katras kolonnas mazāko skaitli (tas būs ne lielāks kā jebkurš cits skaitlis tajā kolonnā), un es pēc tam - lielāko no izvēlētajiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis B kolonnā j. Tagad apskatām skaitli C, kas atrodas rindā i un kolonnā j (iespējams, ka tas ir tas pats, kas A vai B). Tad $A \geq C$, jo A ir lielākais rindā i, līdzīgi $C \geq B$, jo B ir mazākais kolonnā j. No tā seko $A \geq C \geq B$, tātad $A \geq B$ - laimests variantā a) ir vismaz tikpat liels kā variantā b). Tādēļ variants a) ir izdevīgāks.

15. Aplī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru k-to monētu apgriež, līdz viņam jāapgriež jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Pie kādām k vērtībām Renārs apgriezīs visas monētas?

Atrisinājums:

Apskatīsim tās k vērtības, pie kurām Renars neapgriezīs visas monētas. Attiecīgi tas nozīmē, ka pie pirmajām 2013 apgriešanām vismaz viena monēta būs apgriezta 2 reizes. Pieņemsim, ka tā ir kāda m-tā monēta. Lai to vēlreiz apgrieztu var pieņemt, ka tika veikti pilni a apļi, un šo apļu laikā tika veiktas g griešanas (kur $g < 2013$). Tad $m + k \cdot g = m + 2013a$ un $k = 2013a/g$. Lai k būtu vesels skaitlis, zinot, ka $g < 2013$, k ir jābūt vismaz vienam kopīgam dalītājam ar 2013. Skaitli 2013 pirmreizinātājos izsakām kā $3 \cdot 11 \cdot 61$. Tātad šādiem k netiks apgrieztas visas monētas:

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 2007, 2010, 2013;$$

$$11, 22, 33, \ldots, 1991, 2002, 2013;$$

$$61, 122, 183, \ldots, 1891, 1952, 2013.$$

Tiešām, var pārliecināties: ja kādam no šie skaitļiem, piemēram, s, lielākais kopīgais dalītājs ar 2013 ir L ($L > 1$), tad pirmo reizi 2013. monēta tiks apgriezta pēc $2013/L$ griešanām un otro reizi pēc $2 \cdot 2013/L$ griešanām. Skaidrs arī, ka $2 \cdot 2013/L < 2013$, tādēļ pie dotajiem k pirmajās 2013 apgriešanās vismaz viena monēta būtu jāapgriež 2 reizes un griešana apstātos, tātad visas 2013 monētas netiktu apgrieztas. Esam pierādījuši, ka visas monētas netiks apgrieztas tad un tikai tad, ja k ir vismaz viens kopīgs dalītājs ar 2013. Pie visām atlikušajām k vērtībam monētas tiks apgrieztas.

atvērtā kopa 2013

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Edgaram ir divas *Credit Suisse* norēķinu kartes. Par skaidras naudas izņemšanu ārzemēs ar *Maestro* karti komisija ir 5 Šveices franki + 0.5% no izņemtās summas. Savukārt *Master* kartei komisija ir 4% no izņemtās summas, bet ne mazāk kā 10 franki. Ar kuru karti ir izdevīgāk izņemt skaidru naudu?

Atrisinājums:
Ja izņemtā summa ir līdz 250CHF, tad *Maestro* komisija ir mazāka par $5+0.005\cdot 250 = 6.25$CHF, kamēr *Master* komisija ir 10CHF (jo $0.04 \cdot 250 = 10$, un mazākām summām sanāktu mazāk par 10, tātad iedarbojas minimālā komisija 10CHF). Savukārt, ja izņemtā summa ir lielāka par 250CHF, piemēram $250 + x$ franki, tad jāmaksā iepriekšējās komisijas plus $0.005x$ un $0.04x$, izmantojot attiecīgi *Maestro* un *Master* karti. Tātad abos gadījumos izdevīgāka komisija ir *Maestro*.

2. Vispārējās negācijas, kas piemeklējušas Latvijas metalurģijas flagmani un izpaužas kā strauja ražošanas apjoma samazināšanās un nespēja tikt galā ar savām saistībām, izraisījušas straujas uzņēmuma akciju cenas svārstības. 2013. gada 12. aprīlī kompānijas akcijas cena nokritās par 86%, bet nākamajā dienā pieauga par 85,43%. Vai akciju vērtība tādējādi atgriezās ļoti tuvu (±3%) sākotnējai vērtībai, pirms dotajām svārstībām?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka metalurģijas uzņēmuma akciju cena sākotnēji bija x. Tad 12. aprīlī tā nokritās uz $(1 - 0.86)x = 0.14x$. Savukārt nākamajā dienā, tai pieaugot par 85,43%, tā palielinājās uz $0.14x \cdot (1 + 0.8543) \approx 0.26x$. Tātad tā neatgriezās ļoti tuvu sākotnējai vērtībai, lai gan cenas pieaugums procentuāli bija gandrīz tāds pats kā kritums.

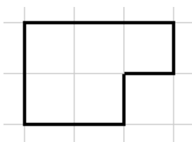
3. Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).

Atrisinājums:
Nē, diemžēl nevar. Ja Edgars armiju sadala pa frontēm $21 - 21 - 28$, tad, lai uzvarētu vismaz divās frontēs, nepieciešami vismaz 44 kareivji.

4. Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?

Atrisinājums:
Jā, varam ņemt skaitļus n^2 un n^3 jebkuram $n > 1$, tad $(n^2)^3 = n^6 = (n^3)^2$. Piemēram, ar $n = 2$ iegūstam skaitļus 4 un 8, attiecīgi $4^3 = 64 = 8^2$.

5. Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:



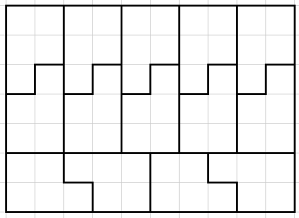
a) taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,

b) taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,

c) taisnstūri ar izmēru 9×9, kuram izņemta vidējā rūtiņa?

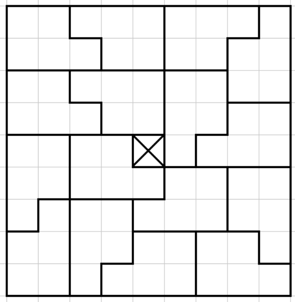
Atrisinājums:

a) Taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas var salikt.



b) Taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas salikt nevar. Dotās figūras laukums ir 5 rūtiņas, tāpēc izveidotā taisnstūra laukumam ir jādalās ar 5. Taisnstūrī ar izmēru 7×7 ir 49 rūtiņas. Tātad skaidrs, ka šādu taisnstūri salikt nevar.

c) Taisnstūri ar izmēru 9×9 rūtiņas, ja tam izņemta vidējā rūtiņa, var salikt.



6. Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, ja kādam skaitlim D ir dalītājs d, tad tam var vienmēr var atrast tieši vienu "pāriniekdalītāju" skaitli D/d. Tātad visus skaitļa D dalītājus varēs sadalīt pa pāriem, t.i., tam būs pāra skaits dalītāju. Izņēmums ir skaitļa kvadrāti a^2, kuriem dalītāja a pāriniekdalītajs būs tas pats skaitlis $a^2/a = a$. Tātad, lai skaitlim būtu nepāra skaits dalītāju, tam jabūt kvadrātam. Lai atrastu vismazāko kvadrātu ar tieši 7 dalītājiem, pārbaudām visu skaitļu kvadrātus $1^2, 2^2, 3^2 \ldots$, līdz nonākam pie $8^2 = 64$, kurš ir pirmais kvadrāts un vismazākais skaitlis ar tieši 7 dalītājiem $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$.

7. Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas F = *fokusa attālums* / *atvēruma diametrs*, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk ieplūstošās gaismas. Ieplūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.

Slēdža ātrums sek.	**1/125**	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvērums	**F5.6**	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	**200**	?	400	100	200	?

Atrisinājums:
ISO 400, F7.8, 1/250 sek., F2.8, ISO 800.

8. Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksādams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvājiet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!

Atrisinājums:
Varam izveidot tabulu, kas uzskatāmāk parāda uzdevumā aprakstītos tēriņus (skat. zemāk). Tā kā Mārtiņš maksā par Martu, var uzskatīt, ka viņa bilance ir $6.96 - 11.04 = -4.08$Ls. Tad Mārtiņš var pārskaitīt Raivim 4.08Ls, Anete Raivim $3,24$Ls un Kristiānai 15.80Ls, lai visi rēķini būtu nokārtoti.

Vārds	Samaksāts par ēdieniem	"Apēsts"	Samaksāts par vilcienu	"Nobraukts"	Bilance par teātra biļetēm	Bilance kopā
Anete	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-8.00 Ls	-19.04 Ls
Raivis	3.00 Ls	-7.20 Ls	15.36 Ls	-3.84 Ls	-	7.32 Ls
Mārtiņš	18.00 Ls	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	6.96 Ls
Marta	-	-7.20 Ls	-	-3.84 Ls	-	-11.04 Ls
Kristiāna	15.00 Ls	-7.20 Ls	-	-	8.00 Ls	15.80 Ls
Kopā	36.00 Ls	-36.00 Ls	15.36 Ls	-15.36 Ls	0.00 Ls	0.00 Ls

9. Plaknē doti trīs punkti. Kā, izmantojot cirkuli un lineālu bez atzīmēm, var konstruēt riņķa līniju, kas satur visus šos trīs punktus? Pamatojiet, kāpēc konstrukcija strādā.

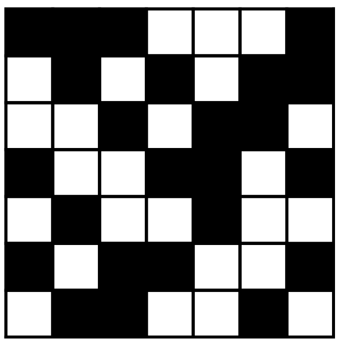
Atrisinājums:
Šīs riņķa līnijas centrs atradīsies tā trijstūra vidusperpendikulu krustpunktā, kura virsotnes ir atzīmētajos punktos. Lai atrastu šo punktu:

a) savienojam punktus, izveidojot trīs nogriežņus,
b) izvēlamies noteiktu rādiusu (piemēram, garākās malas garumu) un ar šo rādiusu uzzīmējam trīs riņķa līnijas ar centriem attiecīgi atzīmētajos punktos,
c) katrām divām riņķa līnijām novelkam taisni caur to krustpunktiem (novilktās taisnes ir trijstūra vidusperpendikuli, ko var pierādīt, izmantojot vienādsānu trijstūrus),
d) taišņu krustpunktā atrodas meklētās riņķa līnijas centrs - velkot riņķa līniju caur kādu no dotajiem punktiem, iegūsim prasīto riņķa līniju (šo var pierādīt, piemēram, izmantojot vienādos taisnleņķa trijstūrus).

10. Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja

a) $n = 4$;
b) $n = 7$?

Atrisinājums:
Dots atrisinājums gadījumam b) $n = 7$. Jebkurš 4×4 apakškvadrāts apmierina arī a).



11. Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **10.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n, kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)

Atrisinājums:
Abos gadījumos atbilde ir $n = 7$. Vienā dienā ir $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekundes, nedēļā $604800 \approx 6 \cdot 10^5$ sekundes. Tātad varam pārbaudīt aptuveni $6 \cdot 10^{14}$ krāsojumu. 7×7 kvadrātam ir

$$2^{49} = 2^{50}/2 = (2^{10})^5/2 \approx (10^3)^5/2 = 5 \cdot 10^{14}$$

iespējamie krāsojumi. Tātad tas paņems aptuveni nedēļu. Savukārt 8×8 kvadrātam ir 2^{64} iespējamie krāsojumi, kas ir $2^{15} \approx 32000$ reižu vairāk nekā iepriekš. Vienā gadā ir aptuveni 50 nedēļas, simts gados - ap 5000. Tātad nepietiks laika, lai pārbaudītu visus 8×8 krāsojumus.

12. Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Atrisinājums:
Izmantosim matemātisko indukciju.
Indukcijas bāze: $n = 1$ vienādība izpildās, $1 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$.
Indukcijas solis: Pieņemsim, ka vienādība ir spēkā skaitlim $n-1$ un pierādīsim skaitlim n.

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 &= (n-1)n(2n-1)/6 + n^2 = n((n-1)(2n-1)/6 + n) \\ &= n((n-1)(2n-1) + 6n)/6 = n(2n^2 - 3n + 1 + 6n)/6 \\ &= n(2n^2 + 3n + 1)/6 = n(n+1)(2n+1)/6. \end{aligned}$$

13. Sacensībās piedalās 2013 motobraucēji, kuri brauc pa 1 km garu apli. Pirmais no motobraucējiem brauc ar ātrumu 1 km/h, otrais motobraucējs brauc ar ātrumu 2 km/h, ..., 2013. motobraucējs brauc ar ātrumu 2013 km/h. Cik apdzīšanas par apli būs notikušas, kad sacensībās būs pagājusi stunda? Braucējam apdzenot citu par diviem apļiem, skaitām tās kā divas apdzīšanas par apli.

Atrisinājums:
Pēc stundas 2013. motobraucējs būs veicis 2013 apļus, 2012. braucējs 2012 apļus, ..., 1. braucējs 1 apli. Tātad 2013. braucējs 1. braucēju būs apdzinis par 2012 apļiem (to, ka braucēji finišēja vienlaicīgi, mēs neskaitām par apdzīšanu), 2. braucēju par 2011 apļiem ... 2012. braucēju par 1 apli. Attiecīgi 2013. braucējs būs veicis

$$2012 + 2011 + 2010 + \ldots + 2 + 1 = 2012(2012+1)/2$$

apdzīšanas. Analogi 2012. braucējs būs veicis $2011(2011+1)/2$ apdzīšanas, bet k-tais braucējs $(k-1)k/2$ apdzīšanas. Tātad kopējais apdzīšanu skaits būs vienāds ar

$$\begin{aligned} &2012(2012+1)/2 + 2011(2011+1)/2 + \ldots + 1(1+1)/2 + 0(0+1)/2 \\ =&\left(2012^2 + 2012 + 2011^2 + 2011 + 2010^2 + 2010 + \ldots + 2^2 + 2 + 1^2 + 1\right)/2 \\ =&\left((2012^2 + 2011^2 + 2010^2 + \ldots + 2^2 + 1^2) + (2012 + 2011 + 2010 + \ldots + 2 + 1)\right)/2 \end{aligned}$$

No **12.** uzdevuma $(2012^2+2011^2+2010^2+\ldots+2^2+1^2)$ var izteikt kā $2012 \cdot 2013 \cdot (4024+1)/6$. Tad meklētā summa būs

$$\begin{aligned} &\left((2012 \cdot 2013 \cdot (4024+1))/6 + 2012 \cdot 2013/2\right)/2 \\ =&(2012 \cdot 2013 \cdot (4024+4))/6/2 \\ =&(2012 \cdot 2013 \cdot (4024+4))/12 \\ =&2012 \cdot 671 \cdot 1007 = 1359502364. \end{aligned}$$

14. Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:

a) vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilsošu laimestu;

b) vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.

Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?

Atrisinājums:
Es vēlos pēc iespējas lielāku laimestu, tādēļ no pieejamajiem skaitļiem vienmēr izvēlēšos lielāko. Savukārt Neša kungs vēlas izmaksāt mazāko iespējamo laimestu, tādēļ izvēlēsies mazāko no pieejamajiem skaitļiem. Variantā a) es izvēlēšos katras rindiņas lielāko skaitli (tātad tas būs vismaz tikpat liels kā jebkurš cits skaitlis šajā rindiņā). Tad Neša kungs izvēlēsies mazāko no šiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis A rindā i. Savukārt variantā b) Neša kungs izvēlētos katras kolonnas mazāko skaitli (tas būs ne lielāks kā jebkurš cits skaitlis tajā kolonnā), un es pēc tam - lielāko no izvēlētajiem, pieņemsim, ka tas ir skaitlis B kolonnā j. Tagad apskatām skaitli C, kas atrodas rindā i un kolonnā j (iespējams, ka tas ir tas pats, kas A vai B). Tad $A \geq C$, jo A ir lielākais rindā i, līdzīgi $C \geq B$, jo B ir mazākais kolonnā j. No tā seko $A \geq C \geq B$, tātad $A \geq B$ - laimests variantā a) ir vismaz tikpat liels kā variantā b). Tādēļ variants a) ir izdevīgāks.

15. Renāram ir 16 kārtis. Ilze izvēlas vienu, iegaumē to un noliek atpakaļ kaudzītē kādā nejaušā vietā, kā arī pasaka savu mīļāko skaitli n ($1 \leq n \leq 16$). Renārs pamīšus sadala kārtis divās vienādās kaudzītēs (tagad un turpmāk - pirmo kārti pirmajā, otro - otrajā, trešo - pirmajā, utt.) un palūdz Ilzei norādīt, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Tālāk Renārs saliek abas kaudzītes kopā un atkal sadala divās citās kaudzītēs, un Ilze norāda, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Šo procesu atkārto vēl divas reizes. Beigās Renārs saliek visas kārtis kopā, uz galda noliek $n-1$ kārti no kaudzītes augšas un kā n-to kārti uz galda uzliek Ilzes kārti. Kā Renārs to izdarīja? Paskaidro un uzraksti skaidru instrukciju, kā realizēt šo kāršu triku.

Atrisinājums:
Apskatīsim zemāk doto tabulu. IV rindā "0" atbilst kārtīm, kas pēc pēdējās (ceturtās) sadalīšanas novietotas augšējā čupiņā, bet "1" - kārtīm, kas novietotas apakšējā čupiņā. Abām šīm kaudzītēm augšējās četras kārtis ir no iepriekšējās dalīšanas augšā novietotās čupiņas. Savukārt katrai no šīm kaudzītēm augšējās divas kārtis ir no 2. dalīšanas augšējās kaudzītes, utt. Šādā veidā varam izveidot tabulu, kas apraksta katrai kārtij (šoreiz sāksim skaitīšanu no nulles - 0., 1., 2., utt.), kurā kaudzītē - augšējā vai apakšējā - tā bija pēc katras dalīšanas. Izrādās, ja no pozīcijai atbilstošajiem cipariem tabulā izveidojam bināru skaitli, pirmajā pozīcijā liekot ciparu no IV rindas, otrajā - no III, trešajā - no II, un pēdējā - no I, iegūstam pozīcijas skaitlim atbilstošu bināro skaitli. Piemēram, 13. pozīcijai iegūstam bināro skaitli 1101, kas atbilst skaitlim 13 decimālajā sistēmā. Tātad, ja vēlamies, lai meklētā kārts būtu 14. pozīcijā (sākot skaitīt no 1) jeb 13. (sākot skaitīt no 0), pārveidojam 13 binārajā skaitīšanas sistēmā (1101) un sākot no labās puses, katrs cipars pasaka priekšā, vai kārts jāliek augšējā (ja cipars ir 0), vai apakšējā kaudzītē (cipars 1). Vispārīgā gadījumā, ja nosaukts skaitlis n, tad $(n-1)$ pārveidojam binārajā skaitīšanas sistēmā un sekojam šim pašam algoritmam.

<table>
<tr><th>Pozīcija</th><th>0.</th><th>1.</th><th>2.</th><th>3.</th><th>4.</th><th>5.</th><th>6.</th><th>7.</th><th>8.</th><th>9.</th><th>10.</th><th>11.</th><th>12.</th><th>13.</th><th>14.</th><th>15.</th></tr>
<tr><td>I</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>II</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>III</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td>IV</td><td colspan="8">0</td><td colspan="8">1</td></tr>
</table>

Līdzīgu uzdevumu un tā skaidrojumu angļu valodā var noskatīties
`http://numberphile.com/videos/27_card_trick.html`