atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 90 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Lapu skaits ir pieaudzis par 30. Tātad tika sagrieztas 10 lapas.

2. Trīs dāmas, kas vienmēr rīkojas loģiski, iegāja kafejnīcā. Oficiante viņām pajautāja, vai visas dzers tēju. Pirmā atbildēja "Es nezinu". Otrā atbildēja tāpat. Ko atbildēja trešā dāma, kas pati šoreiz nolēmusi dzert tēju? Kāpēc?

Atrisinājums:
Trešā dāma atbildēja: "Jā, mēs visas dzersim tēju." Par to, ka visas dzers tēju, trešā dāma varēja secināt no pirmo divu dāmu atbildēm. Ja kāda no viņām nebūtu gribējusi tēju, tad uzreiz būtu varējusi atbildēt, ka visas trīs dāmas nedzers tēju (tēju dzers ne vairāk kā divas). Bet viņas atbidēja, ka nezina, jo tikai pašas par sevi varēja droši pateikt, ka grib dzert tēju, bet nezina par citām dāmām.

3. Autobuss pieturā piestāj tieši ik pēc 15 minūtēm. Katru minūti pieturā ierodas 5 līdz 7 cilvēki, kuri vēlas braukt ar šo autobusu. Vēlākais, pēc cik minūtēm ieradīsies autobuss, ja pašlaik pieturā ir 35 cilvēki?

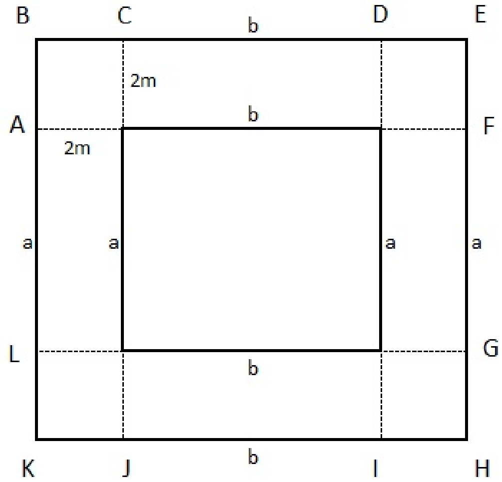
Atrisinājums:
Nākamais autobuss pienāks visvēlāk tad, kad būs pagājs vismazākais laiks kopš iepriekšējā autobusa, tas ir, ja dotais cilvēku skaits pieturā ieradās visātrakajā iespējamā veidā. Skaidrs, ka visātrāk cilvēki sanāk, ja katru minūti ierodas 7 cilvēki, turklāt pēdējā minūtē visi 7 cilvēki ierodas precīzi pašā minūtes sākumā, tas ir, pirmajās 4 minūtēs ierodas 28 cilvēki un vēl 7 tieši nākamās minūtes sākumā, tādēļ mēs varam droši apgalvot, ka nākamais autobuss pieturā ieradīsies vēlākais pēc $15 - 4 = 11$ minūtēm.

4. Ēriks šogad februārī nostrādāja 204 virsstundas. Cik virsstundas viņš strādāja katrā no nedēļas dienām, ja zināms, ka katru dienu (arī brīvdienās) viņš nostrādāja vienādu skaitu stundu? Pamata darba laiks bez virsstundām ir 8 stundas dienā no pirmdienas līdz piektdienai.

Atrisinājums:
Šogad februārī bija 28 dienas jeb 4 nedēļas. Pamata darba laiks nedēļā ir $5 \times 8 = 40$ stundas. Ēriks nedēļā nostrādāja $204 \div 4 = 51$ virsstundu. Tātad kopā vienā nedēļā viņš nostrādāja $40 + 51 = 91$ stundu. Attiecīgi, vienā dienā - $91 \div 7 = 13$ stundas. Tātad darba dienās Ēriks strādāja $13 - 8 = 5$ virsstundas, bet brīvdienās visas 13 nostrādātās stundas bija virsstundas.

5. Ap taisnstūra formas māju 2 metru attālumā no sienām ir tādas pašas formas žogs. Kāds ir žoga perimetrs, ja mājas perimetrs ir 30 metri?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka mājas perimetru var pilnībā atainot (projicēt) uz žoga perimetra (skat. zīmējumu). Savukārt posmi AB, BC, DE, EF, GH, HI, JK, KL katrs ir 2 metrus garš, jo žoga attālums no mājas visos virzienos ir 2 metri. Tātad žoga perimetrs ir $30 + 8 \cdot 2 = 46$ metri.



6. Strādnieks dienā 4 stundas pavadīja, krāsojot sienas, un 1 stundu, flīzējot grīdu. Kā samaksu par paveikto darbu viņš saņēma 100€. Otrs strādnieks savukārt 2 stundas krāsoja sienas, 3 stundas flīzēja grīdas un samaksā saņēma 200€. Kāda ir stundas maksa par krāsošanas darbiem un kāda par flīzēšanas darbiem?

Atrisinājums:
x - tāda ir stundas maksa € par krāsošanas darbiem.
y - tāda ir stundas maksa € par flīzēšanas darbiem.

$$\begin{cases} 4x + \ \ y &= 100 \\ 2x + 3y &= 200 \end{cases}$$

No pirmās vienādības izsakām $y = 100 - 4x$ un ievietojam otrā vienādībā:

$$\begin{aligned} 2x + 3(100 - 4x) &= 200 \\ 2x + 300 - 12x &= 200 \\ -10x &= -100 \\ x &= 10 \\ y &= 100 - 4 \cdot 10 = 60 \end{aligned}$$

Atbilde. Stundas maksa par krāsošanas darbiem ir 10€, par flīzēšanas darbiem - 60€.

7. Piecos vēlēšanu apgabalos reģistrēto balsstiesīgo vēlētāju skaiti ir attiecīgi: Rīgā 398'087; Vidzemē 383'830; Latgalē 240'232; Kurzemē 199'858; Zemgalē 226'032. Ārzemēs reģistrēti vēl 33'873 balsstiesīgie. Aprēķiniet Saeimas vēlēšanās ievēlējamo deputātu skaitu katrā apgabalā atbilstoši vēlēšanu likuma 8. pantam.
Vēlēšanu likuma 8. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 8. panta instrukcijām, Rīgas apgabalam pieskaitām ārzemēs dzīvojošos, iegūstam 431'960. Kopskaits ir 1'481'912. Izdalot ar 100, protams, sanāk 14'819.12. Vēlēšanu apgabaliem atbilstošie dalījumi ar šo skaitli ir tabulā zemāk. Veselos skaitļus saskaitot, iegūstam 98, tātad diviem apgabaliem ar augstākajiem daļskaitļiem jāpalielina deputātu skaits par vienu. Šie apgabali ir Vidzeme un Kurzeme. Gala rezultāti ir tabulas pēdējā rindā.

Rīga	Vidzeme	Latgale	Kurzeme	Zemgale
29.15	25.**90**	16.21	13.**49**	15.25
29	26	16	14	15

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

8. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (3,1), (2,4), (3,1), (2,2), (4,0), (1,1), (0,6) ?

b) (4,2), (3,4), (3,5), (1,0), (4,5), (3,3), (5,2) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+						1
	2	+		+	+	+			4
	3					+			1
	4			+		+			2
	5								0
	6	+							1
	7	+	+	+	+	+	+		6
	cik	3	2	3	2	4	1	0	15

b) Nē, nav iespējams, jo sekotāju skaits 21 nesakrīt ar izsekoto skaitu 23.

9. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:
Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

10. Visi zina, ka $2 + 2 = 2 \times 2$. Rodžers Penrouzs bērnībā bija priecīgs, atklājot vēl vienu piemēru: $3 + 1.5 = 3 \times 1.5$. Vai ir vēl kādi piemēri diviem skaitļiem, kuru summa un reizinājums ir vienādi?

Atrisinājums:
Uzrakstot prasīto vienādojumu ar simboliem, iegūstam:

$$x+y = x\cdot y \quad \Rightarrow \quad x-x\cdot y = -y \quad \Rightarrow \quad x(1-y) = -y \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{y}{1-y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{y-1}.$$

Tātad varam iegūt bezgalīgi daudz šādu skaitļu. Piemēram, $y = 4$, $x = \frac{4}{4-1} = 4/3$.

11. Riteņbraucēju komandā ir 15 sportisti, kuru vecums ir no 18 līdz 28 gadiem. Komandas dalībnieka Edgara vecums ir virs komandas vidējā un atšķiras no citu braucēju vecumiem. Ja zināms, ka gan sportistu, gan komandas vidējais vecums ir veseli skaitļi, vai var gadīties, ka

a) Edgars ir 4. vecākais sportists,

b) Edgars ir 4. jaunākais sportists?

Atrisinājums:

a) Jā, piemēram, desmit sportistiem vecums 18, vienam 24, Edgaram 27, un pārējiem trim 28. Tad vidējais vecums ir $(10 \times 18 + 24 + 27 + 3 \times 28)/15 = 315/15 = 21$

b) Jā, piemēram, vecumi 18, 18, 19, Edgaram 27 un pārējiem 11 vecums 28. Tad vidējais vecums ir $(18 + 18 + 19 + 27 + 11 \times 28)/15 = 390/15 = 26$.

12. Doti trīs veseli pozitīvi skaitļi a, b, c. Zinot, ka $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, vai var gadīties, ka

a) $a + b = 2014$ un $a \cdot b$ dalās ar 2014,

b) $a + b + c = 2014$ un $a \cdot b \cdot c$ dalās ar 2014?

Atrisinājums:

a) Ja $a \cdot b$ dalās ar 2014, tad vai nu a vai b dalās ar 2 (skaitļa 2014 pirmreizinātājs). Varam pieņemt, ka tas ir a. Tā kā vienādības $a + b = 2014$ labā puse dalās ar 2, tad arī $a + b$ dalās ar 2. Zinot, ka a dalās ar 2, arī b jādalās ar 2. Analogi varam secināt par parējiem 2014 pirmreizinātājiem 19 un 53. Tātad gan a, gan b dalās ar 2, 19, 53 un attiecīgi ar 2014, tādēļ $a + b \geq 2 \cdot 2014$. Iegūta pretruna, līdz ar to abi nosacījumi nevar būt patiesi.

b) Jā, tas ir iespējams. Piemēram, $a = 1942$, $b = 19$, $c = 53$. Tad $1942 + 19 + 53 = 2014$ un $1942 \cdot 19 \cdot 53 = 971 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ dalās ar 2014.

13. Aizpildi dotās tabulas tukšās rūtiņas ar cipariem tā, lai trīsciparu skaitļi, kas rodas, lasot rindās, kolonnās un diagonālē (slīpi uz leju) ierakstītos 3 ciparus, visi ir pirmskaitļi!

3		7
	5	
3	1	

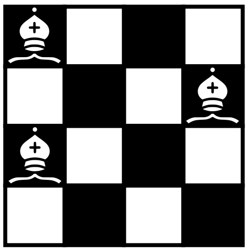
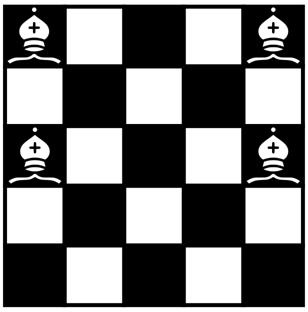
Atrisinājums:

3	1	7
8	5	3
3	1	3

14. Kāds ir lielākais laidņu skaits, ko var uzlikt uz $n \times n$ šaha galdiņa melnajiem lauciņiem, kur $n \geq 2$, lai tie viens otru neapdraudētu? (Kreisā augšējā stūra rūtiņa ir melna.)

Atrisinājums:

Saskaitīsim, cik melno diagonāļu ir uz $n \times n$ šaha galdiņa. Skaitīsim melnās rūtiņas uz augšējās rindiņas - katra no tām pieder citai diagonālei, kura savieno augšējo malu ar kreiso malu. Ja n ir pāra, tad to kopā būs $\frac{n}{2}$; ja nepāra, tad $\frac{n+1}{2}$ un pēdējā rūtiņa būs melna. Saskaitīsim tagad diagonāles otrpus centra diagonālei - tām sākumrūtiņas būs uz labās malējās kolonnas. Analogi, šeit rūtiņu skaits būs $\frac{n}{2}$ un $\frac{n+1}{2}$, attiecīgi pie pāra un nepāra n. Tad, ņemot vērā, ka pie nepāra n augšējās rindiņas pēdējā melnā rūtiņa sakrīt ar sākuma rūtiņu mālējai labajai kolonnai, tad diagonāļu skaits abos gadījumos būs $n = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{n}{2}$. Ievērosim, ka vienrūtiņu diagonāles, kuras veido kreisā augšējā rūtiņa (savieno augšējo malu un kreiso malu) un labā apakšējā rūtiņa (savieno labo malu un apakšējo malu), atradīsies uz vienas diagonāles, ja apskata diagonāles, kas savieno labo malu ar apakšējo malu. Tad uz šīm divām diagonālēm varēs novietot tikai vienu laidni, un uz katras no parējām ne vairāk kā vienu laidni. Tātad kopā ne vairāk kā $n - 1$ laidni. Šo skaitu ir iespējams sasniegt; piemērus, kā to izdarīt pāra un nepāra n gadījumā, skatīt zīmējumā, attiecīgi, ar $n = 4$ un $n = 5$. Laidņus liekam uz visām melnajā rūtiņām malējā kreisajā kolonnā un labajā kolonnā, izņemot uz apakšējām stūra rūtiņām nepāra gadījumā, un izņemot labo apakšējo stūra rūtiņu pāra n gadījumā.

15. Marta ir aizbraukusi darba darīšanās uz Zādziju. Mārtiņš viņai vēlas nosūtīt kāzu gadadienas dāvanu, bet Zādzijā ir problēmas ar zādzībām - viss, kas tiek sūtīts pa pastu, tiek nozagts, ja vien nav ielikts ar piekaramo slēdzeni aizslēgtā kastītē. Mārtiņam un Martai katram ir vairākas atšķirīgas kastes un piekaramās slēdzenes, kuru atslēgas ir tikai viņiem pašiem, bet ne viņu otrajam pusītēm. Kā lai Mārtiņš drošā veidā nosūta dāvanu Martai?

Atrisinājums:
Mārtiņš nosūta dāvanu ar savu piekaramo atslēgu aizslēgtā kastītē. Kad Marta to saņem, viņa tai pašai kastītei uzliek papildus kādu no savām piekaramajām slēdzenēm, un nosūta atpakaļ Mārtiņam. Viņš, savukārt, noņem savu uzlikto slēdzeni un atkal sūta Martai. Marta ir droši saņēmusi savu dāvanu un var tai tikt klāt, atslēdzot savu piekaramo atslēgu.
Piebilde. Kriptogrāfijā šādu metodi sauc par *three-pass protocol*. Lai tā strādātu, ir svarīgi, ka atslēgas nav obligāti jāatslēdz sākot ar pēdējo aizslēgto (kā tas būtu gadījumā, ja Marta ieliktu kasti citā kastē). Tātad nepieciešams *komutatīvs* šifrēšanas algoritms.