atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 90 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Lapu skaits ir pieaudzis par 30. Tātad tika sagrieztas 10 lapas.

2. Skolā, kurā mācās skolēni no 1. līdz 12. klasei, optimālais paralēlklašu skaits katrā no klašu grupām ir 3 un optimālais skolēnu skaits katrā klasē ir no 20 līdz 25. Kāds ir optimālais skolu skaits Valmierā, lai visiem bērniem būtu kur mācīties, ja tajā dzīvo 25'000 iedzīvotāju un 16% no tiem ir vecumā no 7 līdz 19 gadiem? Izskaidrojiet savus papildu pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka visi bērni vecumā 7-19 iet skolā, turklāt visās klašu grupās aptuveni vienādi daudz. Tātad Valmierā ir 25'000·0.16 =4'000 skolēnu, katrā klašu grupā aptuveni 4'000/12 $\approx$ 333. Attiecīgi, katrā klašu grupā paralēlklasē ar burtu A mācīsies aptuveni 111 skolēni. Tā kā $111/25 > 4$, vajadzēs vismaz piecas skolas. Redzam, ka ar piecām skolām pietiktu, jo tad A klasēs katrā klašu grupā varētu mācīties 100 līdz 125 skolēni, un 111 skolēniem tas būs optimāli.

3. Autobuss pieturā piestāj tieši ik pēc 15 minūtēm. Katru minūti pieturā ierodas 5 līdz 7 cilvēki, kuri vēlas braukt ar šo autobusu. Vēlākais, pēc cik minūtēm ieradīsies autobuss, ja pašlaik pieturā ir 35 cilvēki?

Atrisinājums:
Nākamais autobuss pienāks visvēlāk tad, kad būs pagājs vismazākais laiks kopš iepriekšējā autobusa, tas ir, ja dotais cilvēku skaits pieturā ieradās visātrakajā iespējamā veidā. Skaidrs, ka visātrāk cilvēki sanāk, ja katru minūti ierodas 7 cilvēki, turklāt pēdējā minūtē visi 7 cilvēki ierodas precīzi pašā minūtes sākumā, tas ir, pirmajās 4 minūtēs ierodas 28 cilvēki un vēl 7 tieši nākamās minūtes sākumā, tādēļ mēs varam droši apgalvot, ka nākamais autobuss pieturā ieradīsies vēlākais pēc $15 - 4 = 11$ minūtēm.

4. Strādnieks dienā 4 stundas pavadīja, krāsojot sienas, un 1 stundu, flīzējot grīdu. Kā samaksu par paveikto darbu viņš saņēma 100€. Otrs strādnieks savukārt 2 stundas krāsoja sienas, 3 stundas flīzēja grīdas un samaksā saņēma 200€. Kāda ir stundas maksa par krāsošanas darbiem un kāda par flīzēšanas darbiem?

Atrisinājums:
x - tāda ir stundas maksa € par krāsošanas darbiem.
y - tāda ir stundas maksa € par flīzēšanas darbiem.

$$\begin{cases} 4x + y = 100 \\ 2x + 3y = 200 \end{cases}$$

No pirmās vienādības izsakām $y = 100 - 4x$ un ievietojam otrā vienādībā:

$$\begin{aligned}
2x + 3(100 - 4x) &= 200 \\
2x + 300 - 12x &= 200 \\
-10x &= -100 \\
x &= 10 \\
y &= 100 - 4 \cdot 10 = 60
\end{aligned}$$

Atbilde. Stundas maksa par krāsošanas darbiem ir 10€, par flīzēšanas darbiem - 60€.

5. Piecos vēlēšanu apgabalos reģistrēto balsstiesīgo vēlētāju skaiti ir attiecīgi: Rīgā 398'087; Vidzemē 383'830; Latgalē 240'232; Kurzemē 199'858; Zemgalē 226'032. Ārzemēs reģistrēti vēl 33'873 balsstiesīgie. Aprēķiniet Saeimas vēlēšanās ievēlējamo deputātu skaitu katrā apgabalā atbilstoši vēlēšanu likuma 8. pantam.
Vēlēšanu likuma 8. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 8. panta instrukcijām, Rīgas apgabalam pieskaitām ārzemēs dzīvojošos, iegūstam 431'960. Kopskaits ir 1'481'912. Izdalot ar 100, protams, sanāk 14'819.12. Vēlēšanu apgabaliem atbilstošie dalījumi ar šo skaitli ir tabulā zemāk. Veselos skaitļus saskaitot, iegūstam 98, tātad diviem apgabaliem ar augstākajiem daļskaitļiem jāpalielina deputātu skaits par vienu. Šie apgabali ir Vidzeme un Kurzeme. Gala rezultāti ir tabulas pēdējā rindā.

Rīga	Vidzeme	Latgale	Kurzeme	Zemgale
29.15	25.**90**	16.21	13.**49**	15.25
29	26	16	14	15

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

6. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (3,1), (2,4), (3,1), (2,2), (4,0), (1,1), (0,6) ?

b) (4,2), (3,4), (3,5), (1,0), (4,5), (3,3), (5,2) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+						1
	2	+		+	+	+			4
	3					+			1
	4			+		+			2
	5								0
	6	+							1
	7	+	+	+	+	+	+		6
	cik	3	2	3	2	4	1	0	15

b) Nē, nav iespējams, jo sekotāju skaits 21 nesakrīt ar izsekoto skaitu 23.

7. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:
Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

8. Visi zina, ka $2 + 2 = 2 \times 2$. Rodžers Penrouzs bērnībā bija priecīgs, atklājot vēl vienu piemēru: $3+1.5 = 3\times1.5$. Vai ir vēl kādi piemēri diviem skaitļiem, kuru summa un reizinājums ir vienādi?

Atrisinājums:
Uzrakstot prasīto vienādojumu ar simboliem, iegūstam:

$$x+y = x\cdot y \quad\Rightarrow\quad x-x\cdot y = -y \quad\Rightarrow\quad x(1-y) = -y \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{y}{1-y} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{y}{y-1}.$$

Tātad varam iegūt bezgalīgi daudz šādu skaitļu. Piemēram, $y = 4$, $x = \frac{4}{4-1} = 4/3$.

9. Doti 2014 skaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir A. Uzrakstiet formulu, ar kuru aprēķināt doto 2014 skaitļu un patvaļīgi izvēlēta skaitļa K vidējo aritmētisko.

Atrisinājums:
No vidējā aritmētiskā definīcijas seko

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}}{2014} \quad\Rightarrow\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} = 2014 \cdot A.$$

Tādēļ vidējo no sākotnējiem 2014 skaitļiem un K varam aprēķināt šādi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} + K}{2015} = \frac{2014 \cdot A + K}{2015}.$$

10. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^3 = 2$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $6y^3$ dalās ar 3, apskatām iespējamos x^2 atlikumus. Ja x atlikums ir 0, 1 vai 2, tad x^2 atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

11. Selekcionāram Mičulim pieder ābeļdārzs izmērā $40m\times30m$. Ja kādas divas ābeles ir $5m$ attālumā vai tuvāk, ir risks, ka izplatās slimības. Vai viņš dārzā var iestādīt 101 ābeli, neapdraudot to veselību?

Atrisinājums:
Sadalām ābeļdārzu 100 mazākos $4m \times 3m$ laukos. Tā kā Mičulis grib iestādīt 101 ābeli, tad vismaz vienā no 100 mazākajiem laukiem viņam būs jāiestāda vismaz 2 ābeles. Lielākais iespējamais attālums divām ābelēm uz $4m \times 3m$ lauka ir $5m$ (diagonāles garums). Tātad Mičulis nevarēs iestādīt 101 ābeli, neapdraudot to veselību.

12. Gāzes caurule sastāv no 100 posmiem, un ir zināms, ka vienā no tiem ir sūce (caurums), jo vienā caurules galā tiek pumpēti $20m^3/h$, bet otrā nonāk tikai $19m^3/h$. Posmu savienojumu vietas ir pilnīgi drošas pret sūcēm, un tajās ir iespējams nomērīt gāzes plūsmu. Kāds ir iespējami mazākais mērījumu skaits, pēc kuriem noteikti būsim atraduši posmu, kurā ir sūce? Nav japierāda, ka atrasts mazākais mērījumu skaits.

Atrisinājums:
Ir iespējams to izdarīt ar 7 mērījumiem: vienmēr mērot pa vidu caurules intervālam, kurā zināms, ka ir sūce. Pirmais mērījums būs starp 50. un 51. posmu un tādējādi aizdomīgo posmu skaits samazināsies no 100 uz 50. Pēc otrā mērījuma atliek 25 kandidāti, pēc 3. atliek 13 (vai mazāk), tad attiecīgi 7, 4, 2, un pēc septītā mērījuma būs atlicis tikai viens iespējamais caurais posms.
Piebilde. Lai gan tas nebija prasīts, ir viegli pierādīt, ka ar 6 vai mazāk mērījumiem nevar garantēt, ka atradīsim vainīgo posmu. Katram mērījumam ir iespējami divi iznākumi: sūce ir lejup vai augšup no mērījuma vietas, tātad 6 mērījumiem ir $2^6 = 64$ iespējamas iznākumu virknes, un katrai no tām jānoved pie kāda slēdziena - caurā posma. Taču jebkurš no 100 posmiem var būt caurs, tātad ar 6 mērījumiem nevar visos gadījumos pareizi atrast vainīgo posmu.

13. Doti trīs veseli pozitīvi skaitļi a, b, c. Zinot, ka $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, vai var gadīties, ka

a) $a + b = 2014$ un $a \cdot b$ dalās ar 2014,

b) $a + b + c = 2014$ un $a \cdot b \cdot c$ dalās ar 2014?

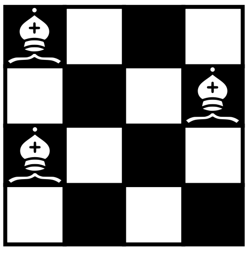
Atrisinājums:

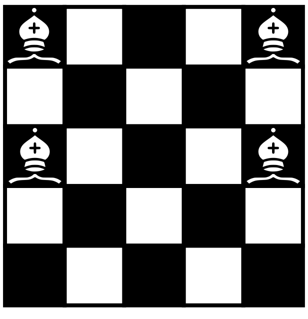
a) Ja $a \cdot b$ dalās ar 2014, tad vai nu a vai b dalās ar 2 (skaitļa 2014 pirmreizinātājs). Varam pieņemt, ka tas ir a. Tā kā vienādības $a + b = 2014$ labā puse dalās ar 2, tad arī $a + b$ dalās ar 2. Zinot, ka a dalās ar 2, arī b jādalās ar 2. Analogi varam secināt par pārējiem 2014 pirmreizinātājiem 19 un 53. Tātad gan a, gan b dalās ar 2, 19, 53 un attiecīgi ar 2014, tādēļ $a + b \geq 2 \cdot 2014$. Iegūta pretruna, līdz ar to abi nosacījumi nevar būt patiesi.

b) Jā, tas ir iespējams. Piemēram, $a = 1942$, $b = 19$, $c = 53$. Tad $1942 + 19 + 53 = 2014$ un $1942 \cdot 19 \cdot 53 = 971 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ dalās ar 2014.

14. Kāds ir lielākais laidņu skaits, ko var uzlikt uz $n \times n$ šaha galdiņa melnajiem lauciņiem, kur $n \geq 2$, lai tie viens otru neapdraudētu? (Kreisā augšējā stūra rūtiņa ir melna.)

Atrisinājums:
Saskaitīsim, cik melno diagonāļu ir uz $n \times n$ šaha galdiņa. Skaitīsim melnās rūtiņas uz augšējās rindiņas - katra no tām pieder citai diagonālei, kura savieno augšējo malu ar kreiso malu. Ja n ir pāra, tad to kopā būs $\frac{n}{2}$; ja nepāra, tad $\frac{n+1}{2}$ un pēdējā rūtiņa būs melna. Saskaitīsim tagad diagonāles otrpus centra diagonālei - tām sākumrūtiņas būs uz labās malējās kolonnas. Analogi, šeit rūtiņu skaits būs $\frac{n}{2}$ un $\frac{n+1}{2}$, attiecīgi pie pāra un nepāra n. Tad, ņemot vērā, ka pie nepāra n augšējās rindiņas pēdējā melnā rūtiņa sakrīt ar sākuma rūtiņu mālējai labajai kolonnai, tad diagonāļu skaits abos gadījumos būs $n = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{n}{2}$. Ievērosim, ka vienrūtiņu diagonāles, kuras veido kreisā augšējā rūtiņa (savieno augšējo malu un kreiso malu) un labā apakšējā rūtiņa (savieno labo malu un apakšējo malu), atradīsies uz vienas diagonāles, ja apskata diagonāles, kas savieno labo malu ar apakšējo malu. Tad uz šīm divām diagonālēm varēs novietot tikai vienu laidni, un uz katras no parējām ne vairāk kā vienu laidni. Tātad kopā ne vairāk kā $n - 1$ laidni. Šo skaitu ir iespējams sasniegt; piemērus, kā to izdarīt pāra un nepāra n gadījumā, skatīt zīmējumā, attiecīgi, ar $n = 4$ un $n = 5$. Laidņus liekam uz visām melnajā rūtiņām malējā kreisajā kolonnā un labajā kolonnā, izņemot uz apakšējām stūra rūtiņām nepāra gadījumā, un izņemot labo apakšējo stūra rūtiņu pāra n gadījumā.





15. Marta ir aizbraukusi darba darīšanās uz Zādziju. Mārtiņš viņai vēlas nosūtīt kāzu gadadienas dāvanu, bet Zādzijā ir problēmas ar zādzībām - viss, kas tiek sūtīts pa pastu, tiek nozagts, ja vien nav ielikts ar piekaramo slēdzeni aizslēgtā kastītē. Mārtiņam un Martai katram ir vairākas atšķirīgas kastes un piekaramās slēdzenes, kuru atslēgas ir tikai viņiem pašiem, bet ne viņu otrajam pusītēm. Kā lai Mārtiņš drošā veidā nosūta dāvanu Martai?

Atrisinājums:
Mārtiņš nosūta dāvanu ar savu piekaramo atslēgu aizslēgtā kastītē. Kad Marta to saņem, viņa tai pašai kastītei uzliek papildus kādu no savām piekaramajām slēdzenēm, un nosūta atpakaļ Mārtiņam. Viņš, savukārt, noņem savu uzlikto slēdzeni un atkal sūta Martai. Marta ir droši saņēmusi savu dāvanu un var tai tikt klāt, atslēdzot savu piekaramo atslēgu.
Piebilde. Kriptogrāfijā šādu metodi sauc par *three-pass protocol*. Lai tā strādātu, ir svarīgi, ka atslēgas nav obligāti jāatslēdz sākot ar pēdējo aizslēgto (kā tas būtu gadījumā, ja Marta ieliktu kasti citā kastē). Tātad nepieciešams *komutatīvs* šifrēšanas algoritms.