atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Skolā, kurā mācās skolēni no 1. līdz 12. klasei, optimālais paralēlklašu skaits katrā no klašu grupām ir 3 un optimālais skolēnu skaits katrā klasē ir no 20 līdz 25. Kāds ir optimālais skolu skaits Valmierā, lai visiem bērniem būtu kur mācīties, ja tajā dzīvo 25'000 iedzīvotāju un 16% no tiem ir vecumā no 7 līdz 19 gadiem? Izskaidrojiet savus papildu pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka visi bērni vecumā 7-19 iet skolā, turklāt visās klašu grupās aptuveni vienādi daudz. Tātad Valmierā ir 25'000·0.16 =4'000 skolēnu, katrā klašu grupā aptuveni 4'000/12 $\approx$ 333. Attiecīgi, katrā klašu grupā paralēlklasē ar burtu A mācīsies aptuveni 111 skolēni. Tā kā $111/25 > 4$, vajadzēs vismaz piecas skolas. Redzam, ka ar piecām skolām pietiktu, jo tad A klasēs katrā klašu grupā varētu mācīties 100 līdz 125 skolēni, un 111 skolēniem tas būs optimāli.

2. Ēriks šogad februārī nostrādāja 204 virsstundas. Cik virsstundas viņš strādāja katrā no nedēļas dienām, ja zināms, ka katru dienu (arī brīvdienās) viņš nostrādāja vienādu skaitu stundu? Pamata darba laiks bez virsstundām ir 8 stundas dienā no pirmdienas līdz piektdienai.

Atrisinājums:
Šogad februārī bija 28 dienas jeb 4 nedēļas. Pamata darba laiks nedēļā ir $5 \times 8 = 40$ stundas. Ēriks nedēļā nostrādāja $204 \div 4 = 51$ virsstundu. Tātad kopā vienā nedēļā viņš nostrādāja $40 + 51 = 91$ stundu. Attiecīgi, vienā dienā - $91 \div 7 = 13$ stundas. Tātad darba dienās Ēriks strādāja $13 - 8 = 5$ virsstundas, bet brīvdienās visas 13 nostrādātās stundas bija virsstundas.

3. Matemātiķiem, gatavojot olimpiādi, bija jāizdomā 36 uzdevumi. Viņi izdomāja par vienu uzdevumu dienā mazāk nekā sākotnēji plānots, tādējādi iekavējot noteikto termiņu par 6 dienām. Cik dienas viņi sākotnēji bija plānojuši strādāt?

Atrisinājums:
Sastādām un atrisinām vienādojumu ar mainīgo k, kas apzīmē plānoto uzdevumu skaitu dienā.

$$\begin{aligned} 36/k + 6 &= 36/(k-1) \\ 36(k-1) + 6k(k-1) &= 36k \\ 6k^2 - 6k - 36 &= 0 \\ k^2 - k - 6 &= 0 \\ k &\in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Tā kā negatīvs uzdevumu skaits neder, bija plānots izdomāt 3 uzdevumus dienā. Attiecīgi atbilde ir, ka bija plānots strādāt $36/3 = 12$ dienas. Varam pārbaudīt, ka slinkuma dēļ beigās sanāca strādāt $36/2 = 18$ dienas, par 6 vairāk nekā plānots.

4. Saeimas vēlēšanās Rīgas vēlēšanu apgabalā ievēlami 29 deputāti. Piecu procentu barjeru pārvarējušās partijas ieguva šādus balsu skaitus: SC 64971; PCTVL 27308; ZZS 25851; LPP/LC 22223; TP 35813; JL 46813; TB/LLNK 21488. Aprēķiniet, cik mandātus Rīgas apgabalā ieguva katra partija, atbilstoši vēlēšanu likuma 38. pantam.
Vēlēšanu likuma 38. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 38. panta instrukcijām, dalām iegūtos balsu skaitus katrai partijai ar nepāra skaitļiem 1, 3, 5 utt. Iegūtie dalījumi (noapaļoti) ir tabulā zemāk. Iekrāsojam treknā druknā lielākos dalījums, līdz esam iekrāsojuši kopumā 29 skaitļus. Mazākais no tiem ir 4298. Visi neiekrāsotie skaitļi ir mazāki. Izskaitām treknos skaitļus, lai iegūtu atbilstošos mandātu skaitus; rezultāti ir tabulas pēdējā kolonnā.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
SC	**64971**	**21657**	**12994**	**9282**	**7219**	**5906**	**4998**	**4331**	3822	8
PCTVL	**27308**	**9103**	**5462**	3901	3034	2483	2101	1821	1606	3
ZZS	**25851**	**8617**	**5170**	3693	2872	2350	1989	1723	1521	3
LPP/LC	**22223**	**7408**	**4445**	3175	2469	2020	1709	1482	1307	3
TP	**35813**	**11938**	**7163**	**5116**	3979	3256	2755	2388	2107	4
JL	**46813**	**15604**	**9363**	**6688**	**5201**	4256	3601	3121	2754	5
TB/LLNK	**21488**	**7163**	**4298**	3070	2388	1953	1653	1433	1264	3

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

5. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (1,6), (2,6), (2,2), (3,1), (3,0), (3,2), (3,0) ?

b) (5,5), (2,1), (0,4), (3,3), (2,6), (4,2), (6,1) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+	+	+	+	+	+	6
	2	+		+	+	+	+	+	6
	3		+		+				2
	4						+		1
	5								0
	6					+		+	2
	7								0
	cik	1	2	2	3	3	3	3	17

b) Nē, nevar gadīties, ka piektais rūķītis seko visiem sešiem pārējiem, taču trešajam nav sekotāju.

6. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās un vismaz vienu 12 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 102 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Sagriežot lapu 12 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 11. Lapu skaits ir pieaudzis par 42, tātad $3x + 11y = 42$, kur x - lapu skaits, kas tika sagriezts 4 daļās; y - lapu skaits, kas tika sagriezts 12 daļās. No tā, ka $3x$ un 42 dalās ar 3, secinām, ka arī $11y$ jādalās ar 3, un attiecīgi y jādalās ar 3. Vienīgā atbilstošā y vērtība ir 3 (ja $y \geq 6$, tad $11y > 42$). Varam aprēķināt arī $x = (42 - 33)/3 = 3$. Tātad kopā tika sagrieztas 6 lapas - 3 no tām 4 daļās un 3 no tām 12 daļās.

7. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:
Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

8. Orbitreks dzīvo mājas 6. stāvā. Katru dienu laikā no 8:00 līdz 16:00 viņš 4 reizes dodas prom no mājas. Visos pārējos dzīvokļos dzīvo pa vienam kaimiņam, kuri šajā pašā laikā 4 reizes atgriežas mājās. Kura stāva kaimiņus Orbitreks, ejot prom, sastop visbiežāk, ja visos stāvos dzīvokļu skaits ir vienāds, izņemot 6. stāvu, kur ir par vienu vairāk? Visi kaimiņi kāpj vienādi ātri un bez pauzēm.

Atrisinājums:
Intuitīvi ir skaidrs, ka visbiežāk satiks 6. stāva kaimiņus, jo 1. stāva kaimiņus Orbitreks satiks tikai 1. stāvā (ieskaitot kāpnes, kas ved uz to), 2. stāvā kaimiņus 1. un 2. stāvā, . . . , 6. stāva kaimiņus 1. stāvā, 2. stāvā, . . . , 5. stāvā un 6. stāvā - tātad 6. stāva kaimiņus sastop vismaz par vienu stāvu lielākā posmā nekā jebkuru citu kaimiņu, tātad visbiežāk (ņemot vērā, ka visi kaimiņi vienlīdz bieži nāk mājās). Skaitliski to var izteikt sekojošā veidā. Pieņemsim, ka, lai uzkāptu vai nokāptu vienu stāvu, visiem mājas iedzīvotājiem nepieciešama 1 minūte, un vienkāršības labad var arī pieņemt, ka katrā stāvā dzīvo pa vienam kaimiņam. Tad 1. stāva kaimiņš uz savu dzīvokli kāps 1 minūti, un, zinot, ka viņš mājās atgriežas 4 reizes, dotajā 240 minūšu laika periodā viņu kāpņu telpā varēs sastapt 4 minūtes. Analogi iegūstam, ka 2. stāva kaimiņu kāpņutelpā kopā varēsim satikt 8 minūtes, 3. stāva kaimiņu 12 minūtes, 4. stāvā kaimiņu 16 minūtes, 5. stāva kaimiņu 20 minūtes, un 6. stāva kaimiņu 24 minūtes. Tātad 6. stāva kaimiņu varēs satikt visgarākā laikā periodā, t.i., visbiežāk. Šajā novērtējumā neņēmām vērā sekojošus faktorus, jo to ietekma uz biežumu, ar kādu satiks katra stāva kaimiņus, ir vienlīdz maza visiem kaimiņiem: - ja zemāko stāvu kaimiņi ierodas ļoti agri, tad var gadīties, ka Orbitreks viņus vispār nesatiek, jo nepaspēj nokāpt lejā līdz viņu stāvam (piemēram, ja 1. stāva kaimiņš ierodas laikā no 8:00 līdz 8:05) - starp katru reizi, kad Orbitreks dodas projām, jāpaiet vismaz 10 minūtēm - laiks, kas nepieciešams, lai Orbitreks nokāptu lejā un pēc tam augšā.

9. Doti 2014 skaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir A. Uzrakstiet formulu, ar kuru aprēķināt doto 2014 skaitļu un patvaļīgi izvēlēta skaitļa K vidējo aritmētisko.

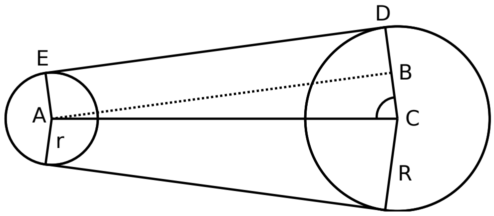
Atrisinājums:
No vidējā aritmētiskā definīcijas seko

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}}{2014} \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} = 2014 \cdot A.$$

Tādēļ vidējo no sākotnējiem 2014 skaitļiem un K varam aprēķināt šādi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} + K}{2015} = \frac{2014 \cdot A + K}{2015}.$$

10. BMX velosipēda priekšējam zobratam ir 44 zobi, aizmugurējam 16. Attālums starp zobratu asīm (centriem) ir 13 collas. Ķēdei katrs posms ir 1/2 collu garš. Cik posmu garu ķēdi vajag, lai tā būtu precīzi nospriegota? *Padoms:* $\cos(80°) = 0.174$, $\sin(80°) = 0.985$.



Atrisinājums:
Katrs zobs atbilst vienam ķēdes posmam, tātad zobratu apkārtmēri ir attiecīgi 22" un 8", un to rādiusi $R = 11/\pi$ un $r = 4/\pi$. ED ir pieskare abām riņķa līnijām, tādēļ rādiusi AE un DC ir tai perpendikulāri. Novelkam AB paralēlu ED, iegūstot taisnstūri $ABDE$. ΔABC ir taisnleņķa, ar hipotenūzu AC garumā 13". Katete BC ir garumā $R - r = 7/\pi \approx 2.23$. Sauksim $\angle ACB$ par α. Tad $\cos(\alpha) = BC/AC \approx 0.17$, un no *padoma* secinām, ka $\alpha \approx 80°$. Seko, ka $ED = AB = AC \cdot \sin(\alpha) \approx 12.8$. Atliek izrēķināt ķēdes ārējo loku garumus. Tā kā to leņķiskie izmēri ir 200° un 160°, iegūstam $22 \cdot 200°/360° = 12.2$ un $8 \cdot 200°/360° = 3.6$. Tātad ķēdes kopējais garums ir vismaz $2 \cdot 12.8 + 12.2 + 3.6 = 41.4$ collas. Tā kā katra posma garums ir 0.5 collas, vajadzēs 83 posmus.

11. Kāds ir lielākais punktu skaits FIFA futbola Pasaules kausa finālturnīra grupu posmā, ar kādu komanda var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai? Kāds ir mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties?
Informācija par turnīra norisi atrodama pielikumā.

Atrisinājums:
Lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai. Apskatīsim, kāpēc 7 punkti nav atbilde šim jautājumam. Grupu posmā katras grupas ietvaros tiek izspēlētas 6 spēles. Maksimālais punktu skaits, ko var iegūt katrā spēlē ir 3, tātad kopā - 18. Lai komanda nekvalificētos, tai grupā jāpaliek 3. vai 4. vietā. Ja komandai 3. vai 4. vietā ir 7 punkti, tad komandām pirmajās divās vietās arī ir jābūt vismaz 7 punktiem. Tātad šīm trim komandām kopā ir jābūt vismaz 21 punktam. Taču kopā maksimālais punktu skaits, ko var nopelnīt, ir 18. Iegūstam pretrunu, kas nozīmē, ka lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai, ir mazāks nekā 7.

Apskatīsim grupu, kurā komanda nekvalificējas nākamajam posmam, lai gan ir ieguvusi 6 punktus. Grupā ir komandas A, B, C un D. Spēļu rezulāti ir sekojoši:
A : B (1 : 0)
A : C (0 : 1)
A : D (3 : 0)
B : C (1 : 0)
B : D (2 : 0)
C : D (1 : 0)
Tabulā redzams, ka komanda C ar 6 punktiem nekvalificējas nākamajam posmam.

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+3	6
B	+2	6
C	+1	6
D	-6	0

Mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties. Ar 1 punktu grupu turnīrā komandai nav iespējams kvalificēties nākamajam posmam. Katra komanda izspēlē 3 spēles. Ja komanda ir saņēmusi tikai 1 punktu, tas nozīmē, ka tā 2 spēlēs ir zaudējusi, tātad ir vismaz 2 komandas ar vismaz 3 punktiem.

Komanda var kvalificēties nākamajam posmam ar 2 punktiem. Piemēram, šādā gadījumā, kad

kvalificējas komanda B ar 2 punktiem:
A : B (1 : 0)
A : C (2 : 0)
A : D (3 : 0)
B : C (0 : 0)
B : D (0 : 0)
C : D (0 : 0)

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+6	9
B	-1	2
C	-2	2
D	-3	2

12. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^3 = 2$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $6y^3$ dalās ar 3, apskatām iespējamos x^2 atlikumus. Ja x atlikums ir 0, 1 vai 2, tad x^2 atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

13. Gāzes caurule sastāv no 100 posmiem, un ir zināms, ka vienā no tiem ir sūce (caurums), jo vienā caurules galā tiek pumpēti $20m^3/h$, bet otrā nonāk tikai $19m^3/h$. Posmu savienojumu vietas ir pilnīgi drošas pret sūcēm, un tajās ir iespējams nomērīt gāzes plūsmu. Kāds ir iespējami mazākais mērījumu skaits, pēc kuriem noteikti būsim atraduši posmu, kurā ir sūce? Nav japierāda, ka atrasts mazākais mērījumu skaits.

Atrisinājums:
Ir iespējams to izdarīt ar 7 mērījumiem: vienmēr mērot pa vidu caurules intervālam, kurā zināms, ka ir sūce. Pirmais mērījums būs starp 50. un 51. posmu un tādējādi aizdomīgo posmu skaits samazināsies no 100 uz 50. Pēc otrā mērījuma atliek 25 kandidāti, pēc 3. atliek 13 (vai mazāk), tad attiecīgi 7, 4, 2, un pēc septītā mērījuma būs atlicis tikai viens iespējamais caurais posms.
Piebilde. Lai gan tas nebija prasīts, ir viegli pierādīt, ka ar 6 vai mazāk mērījumiem nevar garantēt, ka atradīsim vainīgo posmu. Katram mērījumam ir iespējami divi iznākumi: sūce ir lejup vai augšup no mērījuma vietas, tātad 6 mērījumiem ir $2^6 = 64$ iespējamas iznākumu virknes, un katrai no tām jānoved pie kāda slēdziena - caurā posma. Taču jebkurš no 100 posmiem var būt caurs, tātad ar 6 mērījumiem nevar visos gadījumos pareizi atrast vainīgo posmu.

14. Grīns un Tao pierādīja, ka jebkuram naturālam n eksistē aritmētiska progresija garumā n, kura sastāv tikai no pirmskaitļiem. Pierādīt, ka neeksistē bezgalīgi gara šāda aritmētiska progresija.

Atrisinājums:
Ja aritmētiskās progresijas pirmais loceklis ir $a_1 = p$ un solis ir d, tad k-to locekli iegūst pēc formulas $a_k = p + d(k-1)$. Ja apskatām $p+1$-mo locekli, iegūstam $a_{p+1} = p + d(p+1-1) = (d+1)p$, tātad tas nevar būt pirmskaitlis (jo tas dalās ar pirmskaitli p un ar $d+1 > 1$). Tādēļ šīs pirmskaitļu aritmētiskās progresijas garums nevar būt lielāks par p. Šis uzdevums parāda, ka matemātikā jēdzieniem "neierobežoti garš" un "bezgalīgs" ir būtiski atšķirīgas nozīmes.

15. Pieci draugi lido uz Maroku ar lidmašīnu, kurā ir 16 rindas un katrā rindā ir 5 sēdvietas, turklāt visas no tām ir aizpildītas. Tā kā viņi lido ar lidsabiedrību Rajaneir, viņi nevar izvēlēties, kur sēdēt, tādēļ viņu sēdvietas ir patvaļīgi izkaisītas pa lidmašīnu. Katrs no draugiem var vairākkārt sarunāt apmainīties vietām ar pa kreisi, pa labi, priekšā vai aizmugurē sēdošo pasažieri (ja starp divām sēdvietām ir lidmašīnas eja, tad uzskatām, ka tās atrodas blakus). Kāds ir mazākais pārsēšanos skaits, pie kura vienmēr, neatkarīgi no sākotnējā draugu sēdvietu sadalījuma pa lidmašīnu, kādi divi no viņiem spēs apsēsties viens otram blakus?

Atrisinājums:

Lidmašīnas sēdvietu plānu varam uzskatīt par 16×5 rūtiņu tīklu. Šo tīklu varam sadalīt 4 vienādos taisnstūros ar izmēriem 4×5. Tad, zinot, ka lidmašīnā lido 5 draugi, būs skaidrs - kādā no taisnstūriem būs apsēdušies vismaz 2 draugi. Tādēļ pārsēšanos skaits, kas būs nepieciešams, lai no šī taisnstūra kādi 2 draugi nonāktu viens otram blakus, būs ne vairāk kā 6 pārsēšanās: $(\text{taisntūra platums} - 1) + (\text{taisntūra augstums} - 1) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Attiecīgi mazākais pārsēšanos skaits, lai 2 kādi draugi sēdētu blakus, nevarēs būt lielāks par 6. Atliek uzrādīt situāciju, kurā nepieciešamas vismaz 6 pārsēšanās - skat. shematisku attēlojumu zemāk.

			X								X				
X							X								X

X - draugu sēdvietas