atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Matemātiķiem, gatavojot olimpiādi, bija jāizdomā 36 uzdevumi. Viņi izdomāja par vienu uzdevumu dienā mazāk nekā sākotnēji plānots, tādējādi iekavējot noteikto termiņu par 6 dienām. Cik dienas viņi sākotnēji bija plānojuši strādāt?

Atrisinājums:
Sastādām un atrisinām vienādojumu ar mainīgo k, kas apzīmē plānoto uzdevumu skaitu dienā.

$$\begin{aligned} 36/k + 6 &= 36/(k-1) \\ 36(k-1) + 6k(k-1) &= 36k \\ 6k^2 - 6k - 36 &= 0 \\ k^2 - k - 6 &= 0 \\ k &\in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Tā kā negatīvs uzdevumu skaits neder, bija plānots izdomāt 3 uzdevumus dienā. Attiecīgi atbilde ir, ka bija plānots strādāt $36/3 = 12$ dienas. Varam pārbaudīt, ka slinkuma dēļ beigās sanāca strādāt $36/2 = 18$ dienas, par 6 vairāk nekā plānots.

2. Saeimas vēlēšanās Rīgas vēlēšanu apgabalā ievēlami 29 deputāti. Piecu procentu barjeru pārvarējušās partijas ieguva šādus balsu skaitus: SC 64971; PCTVL 27308; ZZS 25851; LPP/LC 22223; TP 35813; JL 46813; TB/LLNK 21488. Aprēķiniet, cik mandātus Rīgas apgabalā ieguva katra partija, atbilstoši vēlēšanu likuma 38. pantam.
Vēlēšanu likuma 38. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 38. panta instrukcijām, dalām iegūtos balsu skaitus katrai partijai ar nepāra skaitļiem 1, 3, 5 utt. Iegūtie dalījumi (noapaļoti) ir tabulā zemāk. Iekrāsojam treknā druknā lielākos dalījums, līdz esam iekrāsojuši kopumā 29 skaitļus. Mazākais no tiem ir 4298. Visi neiekrāsotie skaitļi ir mazāki. Izskaitām treknos skaitļus, lai iegūtu atbilstošos mandātu skaitus; rezultāti ir tabulas pēdējā kolonnā.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
SC	**64971**	**21657**	**12994**	**9282**	**7219**	**5906**	**4998**	**4331**	3822	8
PCTVL	**27308**	**9103**	**5462**	3901	3034	2483	2101	1821	1606	3
ZZS	**25851**	**8617**	**5170**	3693	2872	2350	1989	1723	1521	3
LPP/LC	**22223**	**7408**	**4445**	3175	2469	2020	1709	1482	1307	3
TP	**35813**	**11938**	**7163**	**5116**	3979	3256	2755	2388	2107	4
JL	**46813**	**15604**	**9363**	**6688**	**5201**	4256	3601	3121	2754	5
TB/LLNK	**21488**	**7163**	**4298**	3070	2388	1953	1653	1433	1264	3

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

3. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (1,6), (2,6), (2,2), (3,1), (3,0), (3,2), (3,0) ?

b) (5,5), (2,1), (0,4), (3,3), (2,6), (4,2), (6,1) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+	+	+	+	+	+	6
	2	+		+	+	+	+	+	6
	3		+		+				2
	4						+		1
	5								0
	6					+		+	2
	7								0
	cik	1	2	2	3	3	3	3	17

b) Nē, nevar gadīties, ka piektais rūķītis seko visiem sešiem pārējiem, taču trešajam nav sekotāju.

4. Friziere augustā piedāvāja matu griezumu par īpašu cenu (8.23€), jo "2014. gada augusts ir vienīgais tavā dzīvē, kurā būs 5 piektdienas, 5 sestdienas un 5 svētdienas! Pēdējo reizi tas bija 1191. gadā, nākamreiz būs 2837. gadā; reizi 823 gados šis fenomens!" Vai (un kāpēc) viņai ir taisnība? Ja nē, izskaidro, cik bieži patiesībā notiek šāds fenomens!

Atrisinājums:

Tas gadās tieši tajos gados, kad 1. augusts ir piektdiena. Parastā gadā ir 365 dienas, tātad 52 nedēļas un 1 diena. Nākamgad ir parasts gads, un 1. augusts būs sestdiena un tā katru gadu pa vienai dienai klāt. Garajā gadā ir 366 dienas, tātad tajā 1. augusts būs par divām nedēļas dienām vēlāk nekā iepriekšējā. Katrs ceturtais gads ir garais (izņemot, ja gadskaitlis dalās ar 100, bet ne 400 - bet šo gadījumu ignorēsim). Nākamais garais gads ir 2016. Tātad, sākot ar 2014. gadu, 1. augusts iekritīs šādās dienās:

...	...	2014	'15	*'16*	'17	'18	'19	*'20*	'21	'22	'23	*'24*	'25	'26	'27
...	...	**Pk**	Se	Pr	Ot	Tr	Ce	Se	Sv	Pr	Ot	Ce	**Pk**	Se	Sv
2028	'29	'30	'31	*'32*	'33	'34	'35	*'36*	'37	'38	'39	*'40*	'41	'42	...
Ot	Tr	Ce	**Pk**	Sv	Pr	Ot	Tr	**Pk**	Se	Sv	Pr	Tr	Ce	**Pk**	...

(garie gadi *kursīvā*, piektdienas **treknā drukā**). 2042. gada 1. augusts atkal ir piektdienā, turklāt pēc diviem gadiem seko garais gads, tātad identisks 28 gadu cikls sākas no jauna. Redzam, ka "fenomens" atkārtojas ritmā ik pa 11-6-5-6 gadiem, un mūsu dzīvē būs vēl daudz šādu augustu.

5. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās un vismaz vienu 12 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 102 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:

Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Sagriežot lapu 12 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 11. Lapu skaits ir pieaudzis par 42, tātad $3x + 11y = 42$, kur x - lapu skaits, kas tika sagriezts 4 daļās; y - lapu skaits, kas tika sagriezts 12 daļās. No tā, ka $3x$ un 42 dalās ar 3, secinām, ka arī $11y$ jādalās ar 3, un attiecīgi y jādalās ar 3. Vienīgā atbilstošā y vērtība ir 3 (ja $y \geq 6$, tad $11y > 42$). Varam aprēķināt arī $x = (42 - 33)/3 = 3$. Tātad kopā tika sagrieztas 6 lapas - 3 no tām 4 daļās un 3 no tām 12 daļās.

6. *Capital One (CO)* akcijas pirms gada maksāja 30\$. Biržā par 3.25\$ varēja nopirkt loterijas biļeti (t.s. *opciju*), kas pēc gada izmaksātu laimestu $x - 40\$$ gadījumā, ja *CO* akcijas tajā brīdī maksā

x dolārus, un x ir vairāk nekā 40\$. *Cornwall Capital Management* par 26'000\$ iegādājās daudz šādu opciju un pēc gada saņēma laimestu 480'000\$. Cik tajā brīdī maksāja *CO* akcijas?

Atrisinājums:
CCM nopirka 26'000/3.25=8'000 opcijas. Tātad laimests katrai opcijai bija 480'000/8'000=60\$. Tātad *CO* akciju vērtība bija pieaugusi līdz 40+60=100 dolāriem.

7. Edgars ar Olgu bija sešu dienu ilgā velobraucienā Toskānā. Pirmajā dienā viņi nobrauca par 3km vairāk nekā otrajā. Trešajā dienā - divreiz vairāk nekā ceturtajā, taču vidēji tikpat, cik pirmajā. Pirmajā un piektajā dienā kopā sanāca 100km - tikpat, cik saskaitot trešajā un sestajā dienā nobraukto. Cik kilometrus viņi nobrauca katrā no dienām, ja kopumā odometrs rādīja 277km?

Atrisinājums:
Apzīmējam 1.-6. dienā nobrauktos km ar a, b, c, d, e, f un sastādām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ c = 2d \\ c + d = 2a \\ a + e = 100 \\ c + f = 100 \\ a + b + c + d + e + f = 277 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ c = 2d \\ 3d = 2a \\ e = 100 - a \\ f = 100 - 2d \\ a + a - 3 + 2d + d + 100 - a + 100 - 2d = 277 \end{cases}$$

Ņemam trešo rindu un vienkāršojam pēdējo, lai atrastu a un d, un no tiem - pārējos mainīgos:

$$\begin{cases} 3d = 2a \\ a + d = 80 \end{cases} \Rightarrow \quad 3(80 - a) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 48, b = 45, c = 64, d = 32, e = 52, f = 36.$$

Šie arī attiecīgi ir nobrauktie attālumi katrā no dienām.

8. Kāds ir lielākais punktu skaits FIFA futbola Pasaules kausa finālturnīra grupu posmā, ar kādu komanda var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai? Kāds ir mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties?
Informācija par turnīra norisi atrodama pielikumā.

Atrisinājums:
Lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai. Apskatīsim, kāpēc 7 punkti nav atbilde šim jautājumam. Grupu posmā katras grupas ietvaros tiek izspēlētas 6 spēles. Maksimālais punktu skaits, ko var iegūt katrā spēlē ir 3, tātad kopā - 18. Lai komanda nekvalificētos, tai grupā jāpaliek 3. vai 4. vietā. Ja komandai 3. vai 4. vietā ir 7 punkti, tad komandām pirmajās divās vietās arī ir jābūt vismaz 7 punktiem. Tātad šīm trim komandām kopā ir jābūt vismaz 21 punktam. Taču kopā maksimālais punktu skaits, ko var nopelnīt, ir 18. Iegūstam pretrunu, kas nozīmē, ka lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai, ir mazāks nekā 7.

Apskatīsim grupu, kurā komanda nekvalificējas nākamajam posmam, lai gan ir ieguvusi 6 punktus. Grupā ir komandas A, B, C un D. Spēļu rezulāti ir sekojoši:
A : B (1 : 0)
A : C (0 : 1)
A : D (3 : 0)
B : C (1 : 0)
B : D (2 : 0)
C : D (1 : 0)
Tabulā redzams, ka komanda C ar 6 punktiem nekvalificējas nākamajam posmam.

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+3	6
B	+2	6
C	+1	6
D	-6	0

Mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties. Ar 1 punktu grupu turnīrā komandai nav iespējams kvalificēties nākamajam posmam. Katra komanda izspēlē 3 spēles. Ja komanda ir saņēmusi tikai 1 punktu, tas nozīmē, ka tā 2 spēlēs ir zaudējusi, tātad ir vismaz 2 komandas ar vismaz 3 punktiem.

Komanda var kvalificēties nākamajam posmam ar 2 punktiem. Piemēram, šādā gadījumā, kad kvalificējas komanda B ar 2 punktiem:
A : B (1 : 0)
A : C (2 : 0)
A : D (3 : 0)
B : C (0 : 0)
B : D (0 : 0)
C : D (0 : 0)

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+6	9
B	-1	2
C	-2	2
D	-3	2

9. Pierādīt, ka jebkuriem naturāliem skaitļiem n un k iespējams pakāpi n^k izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu.

Atrisinājums:
n pēc kārtas ņemti nepāra skaitļi veido aritmētisko progresiju $a, a+2, a+4, \ldots\ a+2(n-1)$, kuras summu aprēķina pēc formulas $(a+a+2(n-1))n/2$. Lai atrastu a, risinām vienādojumu

$$\begin{aligned} n^k &= (a+a+2(n-1))n/2 \\ n^{k-1} &= a+n-1 \\ a &= n^{k-1}-n+1. \end{aligned}$$

Atliek pārbaudīt, vai a ir nepāra. Ja $k-1 \geq 1$, tad n^{k-1} un n paritāte sakrīt, līdz ar to starpība ir pāra skaitlis. Pieskaitot 1, iegūstam nepāra skaitli a. Ja $k-1=0$, t.i. $k=1$, tad $n^{k-1}=n^0=1$. Ja n ir nepāra, tad pamatojam kā iepriekš. Ja n ir pāra, tad iegūstam, ka atrisinājums ir $a=1-n+1$, pāra skaitlis.
Tātad pakāpi n^k iespējams izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu tad, ja $k>1$ vai arī, ja $k=1$ un n ir nepāra. Atlikušajā gadījumā ($k=1$, n pāra) tas nav iespējams.

10. Pierādīt, ka vienādojumam $4x^2-5y^2=12$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 5.

Atrisinājums:
12 dalot ar 5, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $5y^2$ dalās ar 5, apskatām iespējamos $4x^2$ atlikumus. Ja x atlikums ir 0,1,2,3 vai 4, tad $4x^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 4, 1, 1, 4. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 5 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

11. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir izmantoti tieši 2 dažādi cipari?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka meklētais četrciparu skaitlis sastāv no cipariem a un b, kur a ir pirmais cipars četrciparu skaitlī. Ciparu a mēs varam izvēlēties 9 variantos (1-9), savukārt b varēsim izvēlēties 9 variantos (visi 10 cipari, izņemot jau 1. pozīcijā izvēlēto). Tātad $9 \cdot 9 = 81$ varianti. Apskatīsim, cik variantos varēsim izveidot četrciparu skaitli no izvēlētajiem cipariem a un b. Pirmajā pozīcijā varēs būt tikai a, savukārt nākamajās trijās pozīcijās a vai b - kopā $2 \cdot 2 \cdot 2$ varianti. Jāņem vērā, ka šie varianti iekļauj arī skaitli $aaaa$, kurš neatbilst nosacījumiem. Tātad četrciparu skaitli no diviem dažādiem cipariem varam izveidot $9 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 1) = 567$ veidos.

12. Martinam Gārdneram oktobrī atzīmēja 100. gadadienu. $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$. Vai vienādība $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ ir patiesa visiem naturāliem n?

Atrisinājums:
Atrisinājumam izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Ar A(k) apzīmēsim vienādību

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2.$$

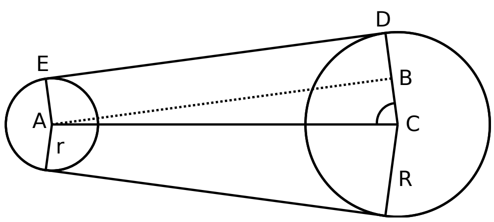
Indukcijas bāze. $A(1)$ ir patiess, jo $1^3 = 1 = 1^2$.
Induktīvā pāreja. Pārliecināsimies, ka $A(k + 1)$ ir patiess, ja $A(k)$ ir patiess.
Risinājumā izmantosim vienādību $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2 = ((1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1))^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + k)(k + 1) + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + 2 \cdot \frac{k(k + 1)}{2} \cdot (k + 1) + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + k(k + 1)^2 + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)^3 = \\
&= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3, \text{ k.b.j.}
\end{aligned}$$

13. BMX velosipēda priekšējam zobratam ir 44 zobi, aizmugurējam 16. Attālums starp zobratu asīm (centriem) ir 13 collas. Ķēdei katrs posms ir 1/2 collu garš. Cik posmu garu ķēdi vajag, lai tā būtu precīzi nospriegota?

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos(\alpha)$	1	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.500	0.342	0.174	0
$\sin(\alpha)$	0	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985	1

Atrisinājums:



Katrs zobs atbilst vienam ķēdes posmam, tātad zobratu apkārtmēri ir attiecīgi 22" un 8", un to rādiusi $R = 11/\pi$ un $r = 4/\pi$. ED ir pieskare abām riņķa līnijām, tādēļ rādiusi AE un DC ir tai perpendikulāri. Novelkam AB paralēlu ED, iegūstot taisnstūri $ABDE$. ΔABC ir taisnleņķa, ar hipotenūzu AC garumā 13". Katete BC ir garumā $R - r = 7/\pi \approx 2.23$. Sauksim $\angle ACB$ par α. Tad $\cos(\alpha) = BC/AC \approx 0.17$, un no tabulas nolasām, ka $\alpha \approx 80°$. Seko, ka $ED = AB = AC \cdot \sin(\alpha) \approx 12.8$. Atliek izrēķināt ķēdes ārējo loku garumus. Tā kā to leņķiskie izmēri ir 200° un 160°, iegūstam $22 \cdot 200°/360° = 12.2$ un $8 \cdot 200°/360° = 3.6$. Tātad ķēdes kopējais garums ir vismaz $2 \cdot 12.8 + 12.2 + 3.6 = 41.4$ collas. Tā kā katra posma garums ir 0.5 collas, vajadzēs 83 posmus.

14. Par *Fermā* skaitļiem sauksim visus skaitļus, kurus var uzrakstīt formā $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, kur n ir nenegatīvs vesels skaitlis. Pierādiet, ka, sākot ar $n \geq 2$, visiem Fermā skaitļiem pēdējais cipars ir 7.

Atrisinājums:
Vispirms atradīsim sakarību starp F_{n+1} un F_n. Ievērojam, ka $(2^{(2^n)})^2 = 2^{(2^{n+1})}$. Atliek tikai tikt galā ar $+1$ daļu, un mēs iegūstam $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. Tagad izmantosim indukcijas principu *Indukcijas bāze.* F_2 īpašība izpildās, jo $2^{(2^2)} + 1 = 17$. *Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka F_{n+1} īpašība izpildās, ja F_n tā izpildās. Zinot, ka F_n pēdējais cipars ir 7, iegūstam, ka $(F_n - 1)$ pēdējais cipars ir 6 un $(F_n - 1)^2$ arī ir 6, un galu galā $(F_n - 1)^2 + 1$ pēdējais cipars ir 7. Tagad, izmantojot iepriekš iegūto sakarību $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$, secinām, ka arī F_{n+1} pēdējais cipars ir 7, k.b.j.
Piebilde. Iespējams risinājums arī ievērojot, ka $2^{2^n} = 2^{4k} = 16^k$, kur $k = 2^{n-2}$ (vesels skaitlis, ja $n \geq 2$). Jebkurai 16 pakāpei pēdējais cipars ir 6 (vienkārša indukcija). Pieskaitot 1, iegūstam pēdējo ciparu 7.

15. Mājai ir vienas ārdurvis, un tās istabas ir savienotas ar durvīm. Visās istabās iespējams nokļūt, bet nav iespējams iziet pa apli - pa kurām durvīm ieiet, pa tām pēc tam būs jānāk atpakaļ. Pierādīt, ka durvju skaits ir vienāds ar istabu skaitu.

Atrisinājums:
Pierādīsim ar matemātisko indukciju, ka visiem n izpildās: mājai ar n istabām arī durvju skaits ir n. *Indukcijas bāze:* ja mājā ir tikai viena istaba $n = 1$, tad arī durvju skaits ir $n = 1$ (tikai ārdurvis). *Induktīvā pāreja:* pieņemam, ka īpašība izpildās kādam $n \geq 1$ un apskatām māju ar $n + 1$ istabu. Iesim mājā iekšā, un turpināsim iet visu laiku cauri jaunām durvīm, kamēr tas vairs nav iespējams. Nevar gadīties, ka esam atgriezušies istabā, kurā jau bijām, jo uzdevumā dots, ka pa apli iziet nav iespējams. Tātad esam nonākuši istabā, kurai ir tikai vienas durvis. Ja mēs šo istabu nojauktu un tās durvis aizmūrētu, tad paliktu māja ar n istabām, kura joprojām atbilstu uzdevuma aprakstam. Tātad pēc indukcijas pieņēmuma tajā ir n durvis. Attiecīgi, pieskaitot pēdējo istabu ar vienām durvīm, esam pierādījuši, ka arī $n + 1$ istabu mājai ir $n + 1$ durvis, un induktīvais pierādījums ir pabeigts.
Piebilde. Ja apzīmējam istabas ar punktiem (virsotnēm) un durvis ar līnijām (šķautnēm), kas tos savieno, iegūstam grafu. Grafu teorijā šādu savienotu grafu bez cikliem sauc par koku. Ja neskaitām ārdurvis (kurām otrā pusē nav istaba), tad esam pierādījuši, ka kokam ar n virsotnēm ir $n - 1$ šķautne.