atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 90 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Lapu skaits ir pieaudzis par 30. Tātad tika sagrieztas 10 lapas.

2. Trīs dāmas, kas vienmēr rīkojas loģiski, iegāja kafejnīcā. Oficiante viņām pajautāja, vai visas dzers tēju. Pirmā atbildēja "Es nezinu". Otrā atbildēja tāpat. Ko atbildēja trešā dāma, kas pati šoreiz nolēmusi dzert tēju? Kāpēc?

Atrisinājums:
Trešā dāma atbildēja: "Jā, mēs visas dzersim tēju." Par to, ka visas dzers tēju, trešā dāma varēja secināt no pirmo divu dāmu atbildēm. Ja kāda no viņām nebūtu gribējusi tēju, tad uzreiz būtu varējusi atbildēt, ka visas trīs dāmas nedzers tēju (tēju dzers ne vairāk kā divas). Bet viņas atbidēja, ka nezina, jo tikai pašas par sevi varēja droši pateikt, ka grib dzert tēju, bet nezina par citām dāmām.

3. Autobuss pieturā piestāj tieši ik pēc 15 minūtēm. Katru minūti pieturā ierodas 5 līdz 7 cilvēki, kuri vēlas braukt ar šo autobusu. Vēlākais, pēc cik minūtēm ieradīsies autobuss, ja pašlaik pieturā ir 35 cilvēki?

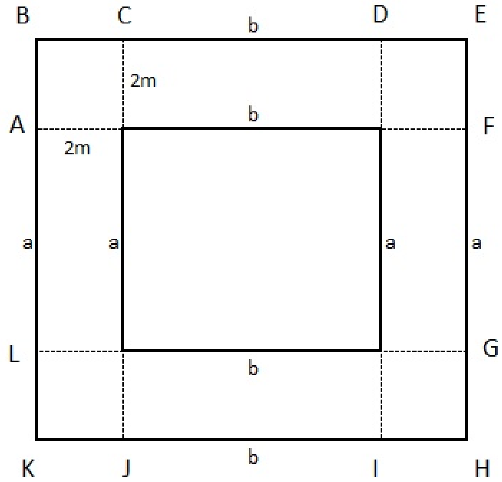
Atrisinājums:
Nākamais autobuss pienāks visvēlāk tad, kad būs pagājs vismazākais laiks kopš iepriekšējā autobusa, tas ir, ja dotais cilvēku skaits pieturā ieradās visātrakajā iespējamā veidā. Skaidrs, ka visātrāk cilvēki sanāk, ja katru minūti ierodas 7 cilvēki, turklāt pēdējā minūtē visi 7 cilvēki ierodas precīzi pašā minūtes sākumā, tas ir, pirmajās 4 minūtēs ierodas 28 cilvēki un vēl 7 tieši nākamās minūtes sākumā, tādēļ mēs varam droši apgalvot, ka nākamais autobuss pieturā ieradīsies vēlākais pēc $15 - 4 = 11$ minūtēm.

4. Ēriks šogad februārī nostrādāja 204 virsstundas. Cik virsstundas viņš strādāja katrā no nedēļas dienām, ja zināms, ka katru dienu (arī brīvdienās) viņš nostrādāja vienādu skaitu stundu? Pamata darba laiks bez virsstundām ir 8 stundas dienā no pirmdienas līdz piektdienai.

Atrisinājums:
Šogad februārī bija 28 dienas jeb 4 nedēļas. Pamata darba laiks nedēļā ir $5 \times 8 = 40$ stundas. Ēriks nedēļā nostrādāja $204 \div 4 = 51$ virsstundu. Tātad kopā vienā nedēļā viņš nostrādāja $40 + 51 = 91$ stundu. Attiecīgi, vienā dienā - $91 \div 7 = 13$ stundas. Tātad darba dienās Ēriks strādāja $13 - 8 = 5$ virsstundas, bet brīvdienās visas 13 nostrādātās stundas bija virsstundas.

5. Ap taisnstūra formas māju 2 metru attālumā no sienām ir tādas pašas formas žogs. Kāds ir žoga perimetrs, ja mājas perimetrs ir 30 metri?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka mājas perimetru var pilnībā atainot (projicēt) uz žoga perimetra (skat. zīmējumu). Savukārt posmi AB, BC, DE, EF, GH, HI, JK, KL katrs ir 2 metrus garš, jo žoga attālums no mājas visos virzienos ir 2 metri. Tātad žoga perimetrs ir $30 + 8 \cdot 2 = 46$ metri.



6. Strādnieks dienā 4 stundas pavadīja, krāsojot sienas, un 1 stundu, flīzējot grīdu. Kā samaksu par paveikto darbu viņš saņēma 100€. Otrs strādnieks savukārt 2 stundas krāsoja sienas, 3 stundas flīzēja grīdas un samaksā saņēma 200€. Kāda ir stundas maksa par krāsošanas darbiem un kāda par flīzēšanas darbiem?

Atrisinājums:
x - tāda ir stundas maksa € par krāsošanas darbiem.
y - tāda ir stundas maksa € par flīzēšanas darbiem.

$$\begin{cases} 4x + y &= 100 \\ 2x + 3y &= 200 \end{cases}$$

No pirmās vienādības izsakām $y = 100 - 4x$ un ievietojam otrā vienādībā:

$$\begin{aligned} 2x + 3(100 - 4x) &= 200 \\ 2x + 300 - 12x &= 200 \\ -10x &= -100 \\ x &= 10 \\ y &= 100 - 4 \cdot 10 = 60 \end{aligned}$$

Atbilde. Stundas maksa par krāsošanas darbiem ir 10€, par flīzēšanas darbiem - 60€.

7. Piecos vēlēšanu apgabalos reģistrēto balsstiesīgo vēlētāju skaiti ir attiecīgi: Rīgā 398'087; Vidzemē 383'830; Latgalē 240'232; Kurzemē 199'858; Zemgalē 226'032. Ārzemēs reģistrēti vēl 33'873 balsstiesīgie. Aprēķiniet Saeimas vēlēšanās ievēlējamo deputātu skaitu katrā apgabalā atbilstoši vēlēšanu likuma 8. pantam.
Vēlēšanu likuma 8. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 8. panta instrukcijām, Rīgas apgabalam pieskaitām ārzemēs dzīvojošos, iegūstam 431'960. Kopskaits ir 1'481'912. Izdalot ar 100, protams, sanāk 14'819.12. Vēlēšanu apgabaliem atbilstošie dalījumi ar šo skaitli ir tabulā zemāk. Veselos skaitļus saskaitot, iegūstam 98, tātad diviem apgabaliem ar augstākajiem daļskaitļiem jāpalielina deputātu skaits par vienu. Šie apgabali ir Vidzeme un Kurzeme. Gala rezultāti ir tabulas pēdējā rindā.

Rīga	Vidzeme	Latgale	Kurzeme	Zemgale
29.15	25.**90**	16.21	13.**49**	15.25
29	26	16	14	15

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

8. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (3,1), (2,4), (3,1), (2,2), (4,0), (1,1), (0,6) ?

b) (4,2), (3,4), (3,5), (1,0), (4,5), (3,3), (5,2) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

kas \ kam	1	2	3	4	5	6	7	cik
1		+						1
2	+		+	+	+			4
3					+			1
4			+		+			2
5								0
6	+							1
7	+	+	+	+	+	+		6
cik	3	2	3	2	4	1	0	15

b) Nē, nav iespējams, jo sekotāju skaits 21 nesakrīt ar izsekoto skaitu 23.

9. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:

Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

10. Visi zina, ka $2 + 2 = 2 \times 2$. Rodžers Penrouzs bērnībā bija priecīgs, atklājot vēl vienu piemēru: $3 + 1.5 = 3 \times 1.5$. Vai ir vēl kādi piemēri diviem skaitļiem, kuru summa un reizinājums ir vienādi?

Atrisinājums:

Uzrakstot prasīto vienādojumu ar simboliem, iegūstam:

$$x+y = x\cdot y \quad\Rightarrow\quad x - x\cdot y = -y \quad\Rightarrow\quad x(1-y) = -y \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{y}{1-y} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{y}{y-1}.$$

Tātad varam iegūt bezgalīgi daudz šādu skaitļu. Piemēram, $y = 4$, $x = \frac{4}{4-1} = 4/3$.

11. Riteņbraucēju komandā ir 15 sportisti, kuru vecums ir no 18 līdz 28 gadiem. Komandas dalībnieka Edgara vecums ir virs komandas vidējā un atšķiras no citu braucēju vecumiem. Ja zināms, ka gan sportistu, gan komandas vidējais vecums ir veseli skaitļi, vai var gadīties, ka

a) Edgars ir 4. vecākais sportists,

b) Edgars ir 4. jaunākais sportists?

Atrisinājums:

a) Jā, piemēram, desmit sportistiem vecums 18, vienam 24, Edgaram 27, un pārējiem trim 28. Tad vidējais vecums ir $(10 \times 18 + 24 + 27 + 3 \times 28)/15 = 315/15 = 21$

b) Jā, piemēram, vecumi 18, 18, 19, Edgaram 27 un pārējiem 11 vecums 28. Tad vidējais vecums ir $(18 + 18 + 19 + 27 + 11 \times 28)/15 = 390/15 = 26$.

12. Doti trīs veseli pozitīvi skaitļi a, b, c. Zinot, ka $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, vai var gadīties, ka

a) $a + b = 2014$ un $a \cdot b$ dalās ar 2014,

b) $a + b + c = 2014$ un $a \cdot b \cdot c$ dalās ar 2014?

Atrisinājums:

a) Ja $a \cdot b$ dalās ar 2014, tad vai nu a vai b dalās ar 2 (skaitļa 2014 pirmreizinātājs). Varam pieņemt, ka tas ir a. Tā kā vienādības $a + b = 2014$ labā puse dalās ar 2, tad arī $a + b$ dalās ar 2. Zinot, ka a dalās ar 2, arī b jādalās ar 2. Analogi varam secināt par parējiem 2014 pirmreizinātājiem 19 un 53. Tātad gan a, gan b dalās ar 2, 19, 53 un attiecīgi ar 2014, tādēļ $a + b \geq 2 \cdot 2014$. Iegūta pretruna, līdz ar to abi nosacījumi nevar būt patiesi.

b) Jā, tas ir iespējams. Piemēram, $a = 1942$, $b = 19$, $c = 53$. Tad $1942 + 19 + 53 = 2014$ un $1942 \cdot 19 \cdot 53 = 971 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ dalās ar 2014.

13. Aizpildi dotās tabulas tukšās rūtiņas ar cipariem tā, lai trīsciparu skaitļi, kas rodas, lasot rindās, kolonnās un diagonālē (slīpi uz leju) ierakstītos 3 ciparus, visi ir pirmskaitļi!

3		7
	5	
3	1	

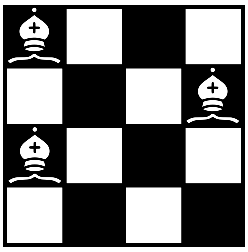
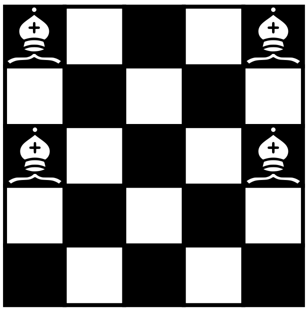
Atrisinājums:

3	1	7
8	5	3
3	1	3

14. Kāds ir lielākais laidņu skaits, ko var uzlikt uz $n \times n$ šaha galdiņa melnajiem lauciņiem, kur $n \geq 2$, lai tie viens otru neapdraudētu? (Kreisā augšējā stūra rūtiņa ir melna.)

Atrisinājums:

Saskaitīsim, cik melno diagonāļu ir uz $n \times n$ šaha galdiņa. Skaitīsim melnās rūtiņas uz augšējās rindiņas - katra no tām pieder citai diagonālei, kura savieno augšējo malu ar kreiso malu. Ja n ir pāra, tad to kopā būs $\frac{n}{2}$; ja nepāra, tad $\frac{n+1}{2}$ un pēdējā rūtiņa būs melna. Saskaitīsim tagad diagonāles otrpus centra diagonālei - tām sākumrūtiņas būs uz labās malējās kolonnas. Analogi, šeit rūtiņu skaits būs $\frac{n}{2}$ un $\frac{n+1}{2}$, attiecīgi pie pāra un nepāra n. Tad, ņemot vērā, ka pie nepāra n augšējās rindiņas pēdējā melnā rūtiņa sakrīt ar sākuma rūtiņu mālējai labajai kolonnai, tad diagonāļu skaits abos gadījumos būs $n = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{n}{2}$. Ievērosim, ka vienrūtiņu diagonāles, kuras veido kreisā augšējā rūtiņa (savieno augšējo malu un kreiso malu) un labā apakšējā rūtiņa (savieno labo malu un apakšējo malu), atradīsies uz vienas diagonāles, ja apskata diagonāles, kas savieno labo malu ar apakšējo malu. Tad uz šīm divām diagonālēm varēs novietot tikai vienu laidni, un uz katras no parējām ne vairāk kā vienu laidni. Tātad kopā ne vairāk kā $n - 1$ laidni. Šo skaitu ir iespējams sasniegt; piemērus, kā to izdarīt pāra un nepāra n gadījumā, skatīt zīmējumā, attiecīgi, ar $n = 4$ un $n = 5$. Laidņus liekam uz visām melnajā rūtiņām malējā kreisajā kolonnā un labajā kolonnā, izņemot uz apakšējām stūra rūtiņām nepāra gadījumā, un izņemot labo apakšējo stūra rūtiņu pāra n gadījumā.

15. Marta ir aizbraukusi darba darīšanās uz Zādziju. Mārtiņš viņai vēlas nosūtīt kāzu gadadienas dāvanu, bet Zādzijā ir problēmas ar zādzībām - viss, kas tiek sūtīts pa pastu, tiek nozagts, ja vien nav ielikts ar piekaramo slēdzeni aizslēgtā kastītē. Mārtiņam un Martai katram ir vairākas atšķirīgas kastes un piekaramās slēdzenes, kuru atslēgas ir tikai viņiem pašiem, bet ne viņu otrajam pusītēm. Kā lai Mārtiņš drošā veidā nosūta dāvanu Martai?

Atrisinājums:
Mārtiņš nosūta dāvanu ar savu piekaramo atslēgu aizslēgtā kastītē. Kad Marta to saņem, viņa tai pašai kastītei uzliek papildus kādu no savām piekaramajām slēdzenēm, un nosūta atpakaļ Mārtiņam. Viņš, savukārt, noņem savu uzlikto slēdzeni un atkal sūta Martai. Marta ir droši saņēmusi savu dāvanu un var tai tikt klāt, atslēdzot savu piekaramo atslēgu.
Piebilde. Kriptogrāfijā šādu metodi sauc par *three-pass protocol*. Lai tā strādātu, ir svarīgi, ka atslēgas nav obligāti jāatslēdz sākot ar pēdējo aizslēgto (kā tas būtu gadījumā, ja Marta ieliktu kasti citā kastē). Tātad nepieciešams *komutatīvs* šifrēšanas algoritms.

atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 90 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Lapu skaits ir pieaudzis par 30. Tātad tika sagrieztas 10 lapas.

2. Skolā, kurā mācās skolēni no 1. līdz 12. klasei, optimālais paralēlklašu skaits katrā no klašu grupām ir 3 un optimālais skolēnu skaits katrā klasē ir no 20 līdz 25. Kāds ir optimālais skolu skaits Valmierā, lai visiem bērniem būtu kur mācīties, ja tajā dzīvo 25'000 iedzīvotāju un 16% no tiem ir vecumā no 7 līdz 19 gadiem? Izskaidrojiet savus papildu pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka visi bērni vecumā 7-19 iet skolā, turklāt visās klašu grupās aptuveni vienādi daudz. Tātad Valmierā ir 25'000·0.16 =4'000 skolēnu, katrā klašu grupā aptuveni 4'000/12 $\approx$ 333. Attiecīgi, katrā klašu grupā paralēlklasē ar burtu A mācīsies aptuveni 111 skolēni. Tā kā $111/25 > 4$, vajadzēs vismaz piecas skolas. Redzam, ka ar piecām skolām pietiktu, jo tad A klasēs katrā klašu grupā varētu mācīties 100 līdz 125 skolēni, un 111 skolēniem tas būs optimāli.

3. Autobuss pieturā piestāj tieši ik pēc 15 minūtēm. Katru minūti pieturā ierodas 5 līdz 7 cilvēki, kuri vēlas braukt ar šo autobusu. Vēlākais, pēc cik minūtēm ieradīsies autobuss, ja pašlaik pieturā ir 35 cilvēki?

Atrisinājums:
Nākamais autobuss pienāks visvēlāk tad, kad būs pagājis vismazākais laiks kopš iepriekšējā autobusa, tas ir, ja dotais cilvēku skaits pieturā ieradās visātrakajā iespējamā veidā. Skaidrs, ka visātrāk cilvēki sanāk, ja katru minūti ierodas 7 cilvēki, turklāt pēdējā minūtē visi 7 cilvēki ierodas precīzi pašā minūtes sākumā, tas ir, pirmajās 4 minūtēs ierodas 28 cilvēki un vēl 7 tieši nākamās minūtes sākumā, tādēļ mēs varam droši apgalvot, ka nākamais autobuss pieturā ieradīsies vēlākais pēc $15 - 4 = 11$ minūtēm.

4. Strādnieks dienā 4 stundas pavadīja, krāsojot sienas, un 1 stundu, flīzējot grīdu. Kā samaksu par paveikto darbu viņš saņēma 100€. Otrs strādnieks savukārt 2 stundas krāsoja sienas, 3 stundas flīzēja grīdas un samaksā saņēma 200€. Kāda ir stundas maksa par krāsošanas darbiem un kāda par flīzēšanas darbiem?

Atrisinājums:
x - tāda ir stundas maksa € par krāsošanas darbiem.
y - tāda ir stundas maksa € par flīzēšanas darbiem.

$$\begin{cases} 4x + \quad y &= 100 \\ 2x + 3y &= 200 \end{cases}$$

No pirmās vienādības izsakām $y = 100 - 4x$ un ievietojam otrā vienādībā:

$$\begin{aligned}
2x + 3(100 - 4x) &= 200 \\
2x + 300 - 12x &= 200 \\
-10x &= -100 \\
x &= 10 \\
y &= 100 - 4 \cdot 10 = 60
\end{aligned}$$

Atbilde. Stundas maksa par krāsošanas darbiem ir 10€, par flīzēšanas darbiem - 60€.

5. Piecos vēlēšanu apgabalos reģistrēto balsstiesīgo vēlētāju skaiti ir attiecīgi: Rīgā 398'087; Vidzemē 383'830; Latgalē 240'232; Kurzemē 199'858; Zemgalē 226'032. Ārzemēs reģistrēti vēl 33'873 balsstiesīgie. Aprēķiniet Saeimas vēlēšanās ievēlējamo deputātu skaitu katrā apgabalā atbilstoši vēlēšanu likuma 8. pantam.
Vēlēšanu likuma 8. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 8. panta instrukcijām, Rīgas apgabalam pieskaitām ārzemēs dzīvojošos, iegūstam 431'960. Kopskaits ir 1'481'912. Izdalot ar 100, protams, sanāk 14'819.12. Vēlēšanu apgabaliem atbilstošie dalījumi ar šo skaitli ir tabulā zemāk. Veselos skaitļus saskaitot, iegūstam 98, tātad diviem apgabaliem ar augstākajiem daļskaitļiem jāpalielina deputātu skaits par vienu. Šie apgabali ir Vidzeme un Kurzeme. Gala rezultāti ir tabulas pēdējā rindā.

Rīga	Vidzeme	Latgale	Kurzeme	Zemgale
29.15	25.**90**	16.21	13.**49**	15.25
29	26	16	14	15

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

6. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (3,1), (2,4), (3,1), (2,2), (4,0), (1,1), (0,6) ?

b) (4,2), (3,4), (3,5), (1,0), (4,5), (3,3), (5,2) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

					kam				
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+						1
	2	+		+	+	+			4
	3					+			1
	4			+		+			2
	5								0
	6	+							1
	7	+	+	+	+	+	+		6
	cik	3	2	3	2	4	1	0	15

b) Nē, nav iespējams, jo sekotāju skaits 21 nesakrīt ar izsekoto skaitu 23.

7. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:
Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

8. Visi zina, ka $2 + 2 = 2 \times 2$. Rodžers Penrouzs bērnībā bija priecīgs, atklājot vēl vienu piemēru: $3+1.5 = 3\times 1.5$. Vai ir vēl kādi piemēri diviem skaitļiem, kuru summa un reizinājums ir vienādi?

Atrisinājums:
Uzrakstot prasīto vienādojumu ar simboliem, iegūstam:

$$x+y = x\cdot y \quad\Rightarrow\quad x-x\cdot y = -y \quad\Rightarrow\quad x(1-y) = -y \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{y}{1-y} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{y}{y-1}.$$

Tātad varam iegūt bezgalīgi daudz šādu skaitļu. Piemēram, $y = 4$, $x = \frac{4}{4-1} = 4/3$.

9. Doti 2014 skaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir A. Uzrakstiet formulu, ar kuru aprēķināt doto 2014 skaitļu un patvaļīgi izvēlēta skaitļa K vidējo aritmētisko.

Atrisinājums:
No vidējā aritmētiskā definīcijas seko

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}}{2014} \quad\Rightarrow\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} = 2014 \cdot A.$$

Tādēļ vidējo no sākotnējiem 2014 skaitļiem un K varam aprēķināt šādi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} + K}{2015} = \frac{2014 \cdot A + K}{2015}.$$

10. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^3 = 2$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $6y^3$ dalās ar 3, apskatām iespējamos x^2 atlikumus. Ja x atlikums ir 0, 1 vai 2, tad x^2 atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

11. Selekcionāram Mičulim pieder ābeļdārzs izmērā $40m\times 30m$. Ja kādas divas ābeles ir $5m$ attālumā vai tuvāk, ir risks, ka izplatās slimības. Vai viņš dārzā var iestādīt 101 ābeli, neapdraudot to veselību?

Atrisinājums:
Sadalām ābeļdārzu 100 mazākos $4m \times 3m$ laukos. Tā kā Mičulis grib iestādīt 101 ābeli, tad vismaz vienā no 100 mazākajiem laukiem viņam būs jāiestāda vismaz 2 ābeles. Lielākais iespējamais attālums divām ābelēm uz $4m \times 3m$ lauka ir $5m$ (diagonāles garums). Tātad Mičulis nevarēs iestādīt 101 ābeli, neapdraudot to veselību.

12. Gāzes caurule sastāv no 100 posmiem, un ir zināms, ka vienā no tiem ir sūce (caurums), jo vienā caurules galā tiek pumpēti $20m^3/h$, bet otrā nonāk tikai $19m^3/h$. Posmu savienojumu vietas ir pilnīgi drošas pret sūcēm, un tajās ir iespējams nomērīt gāzes plūsmu. Kāds ir iespējami mazākais mērījumu skaits, pēc kuriem noteikti būsim atraduši posmu, kurā ir sūce? Nav japierāda, ka atrasts mazākais mērījumu skaits.

Atrisinājums:
Ir iespējams to izdarīt ar 7 mērījumiem: vienmēr mērot pa vidu caurules intervālam, kurā zināms, ka ir sūce. Pirmais mērījums būs starp 50. un 51. posmu un tādējādi aizdomīgo posmu skaits samazināsies no 100 uz 50. Pēc otrā mērījuma atliek 25 kandidāti, pēc 3. atliek 13 (vai mazāk), tad attiecīgi 7, 4, 2, un pēc septītā mērījuma būs atlicis tikai viens iespējamais caurais posms.
Piebilde. Lai gan tas nebija prasīts, ir viegli pierādīt, ka ar 6 vai mazāk mērījumiem nevar garantēt, ka atradīsim vainīgo posmu. Katram mērījumam ir iespējami divi iznākumi: sūce ir lejup vai augšup no mērījuma vietas, tātad 6 mērījumiem ir $2^6 = 64$ iespējamas iznākumu virknes, un katrai no tām jānoved pie kāda slēdziena - caurā posma. Taču jebkurš no 100 posmiem var būt caurs, tātad ar 6 mērījumiem nevar visos gadījumos pareizi atrast vainīgo posmu.

13. Doti trīs veseli pozitīvi skaitļi a, b, c. Zinot, ka $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, vai var gadīties, ka

a) $a + b = 2014$ un $a \cdot b$ dalās ar 2014,

b) $a + b + c = 2014$ un $a \cdot b \cdot c$ dalās ar 2014?

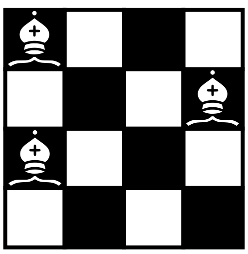
Atrisinājums:

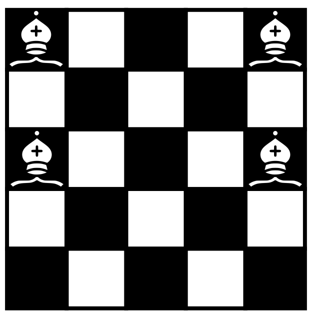
a) Ja $a \cdot b$ dalās ar 2014, tad vai nu a vai b dalās ar 2 (skaitļa 2014 pirmreizinātājs). Varam pieņemt, ka tas ir a. Tā kā vienādības $a + b = 2014$ labā puse dalās ar 2, tad arī $a + b$ dalās ar 2. Zinot, ka a dalās ar 2, arī b jādalās ar 2. Analogi varam secināt par pārējiem 2014 pirmreizinātājiem 19 un 53. Tātad gan a, gan b dalās ar 2, 19, 53 un attiecīgi ar 2014, tādēļ $a + b \geq 2 \cdot 2014$. Iegūta pretruna, līdz ar to abi nosacījumi nevar būt patiesi.

b) Jā, tas ir iespējams. Piemēram, $a = 1942$, $b = 19$, $c = 53$. Tad $1942 + 19 + 53 = 2014$ un $1942 \cdot 19 \cdot 53 = 971 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ dalās ar 2014.

14. Kāds ir lielākais laidņu skaits, ko var uzlikt uz $n \times n$ šaha galdiņa melnajiem lauciņiem, kur $n \geq 2$, lai tie viens otru neapdraudētu? (Kreisā augšējā stūra rūtiņa ir melna.)

Atrisinājums:
Saskaitīsim, cik melno diagonāļu ir uz $n \times n$ šaha galdiņa. Skaitīsim melnās rūtiņas uz augšējās rindiņas - katra no tām pieder citai diagonālei, kura savieno augšējo malu ar kreiso malu. Ja n ir pāra, tad to kopā būs $\frac{n}{2}$; ja nepāra, tad $\frac{n+1}{2}$ un pēdējā rūtiņa būs melna. Saskaitīsim tagad diagonāles otrpus centra diagonālei - tām sākumrūtiņas būs uz labās malējās kolonnas. Analogi, šeit rūtiņu skaits būs $\frac{n}{2}$ un $\frac{n+1}{2}$, attiecīgi pie pāra un nepāra n. Tad, ņemot vērā, ka pie nepāra n augšējās rindiņas pēdējā melnā rūtiņa sakrīt ar sākuma rūtiņu mālējai labajai kolonnai, tad diagonāļu skaits abos gadījumos būs $n = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{n}{2}$. Ievērosim, ka vienrūtiņu diagonāles, kuras veido kreisā augšējā rūtiņa (savieno augšējo malu un kreiso malu) un labā apakšējā rūtiņa (savieno labo malu un apakšējo malu), atradīsies uz vienas diagonāles, ja apskata diagonāles, kas savieno labo malu ar apakšējo malu. Tad uz šīm divām diagonālēm varēs novietot tikai vienu laidni, un uz katras no parējām ne vairāk kā vienu laidni. Tātad kopā ne vairāk kā $n - 1$ laidni. Šo skaitu ir iespējams sasniegt; piemērus, kā to izdarīt pāra un nepāra n gadījumā, skatīt zīmējumā, attiecīgi, ar $n = 4$ un $n = 5$. Laidņus liekam uz visām melnajā rūtiņām malējā kreisajā kolonnā un labajā kolonnā, izņemot uz apakšējām stūra rūtiņām nepāra gadījumā, un izņemot labo apakšējo stūra rūtiņu pāra n gadījumā.





15. Marta ir aizbraukusi darba darīšanās uz Zādziju. Mārtiņš viņai vēlas nosūtīt kāzu gadadienas dāvanu, bet Zādzijā ir problēmas ar zādzībām - viss, kas tiek sūtīts pa pastu, tiek nozagts, ja vien nav ielikts ar piekaramo slēdzeni aizslēgtā kastītē. Mārtiņam un Martai katram ir vairākas atšķirīgas kastes un piekaramās slēdzenes, kuru atslēgas ir tikai viņiem pašiem, bet ne viņu otrajam pusītēm. Kā lai Mārtiņš drošā veidā nosūta dāvanu Martai?

Atrisinājums:

Mārtiņš nosūta dāvanu ar savu piekaramo atslēgu aizslēgtā kastītē. Kad Marta to saņem, viņa tai pašai kastītei uzliek papildus kādu no savām piekaramajām slēdzenēm, un nosūta atpakaļ Mārtiņam. Viņš, savukārt, noņem savu uzlikto slēdzeni un atkal sūta Martai. Marta ir droši saņēmusi savu dāvanu un var tai tikt klāt, atslēdzot savu piekaramo atslēgu.

Piebilde. Kriptogrāfijā šādu metodi sauc par *three-pass protocol*. Lai tā strādātu, ir svarīgi, ka atslēgas nav obligāti jāatslēdz sākot ar pēdējo aizslēgto (kā tas būtu gadījumā, ja Marta ieliktu kasti citā kastē). Tātad nepieciešams *komutatīvs* šifrēšanas algoritms.

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Skolā, kurā mācās skolēni no 1. līdz 12. klasei, optimālais paralēlklašu skaits katrā no klašu grupām ir 3 un optimālais skolēnu skaits katrā klasē ir no 20 līdz 25. Kāds ir optimālais skolu skaits Valmierā, lai visiem bērniem būtu kur mācīties, ja tajā dzīvo 25'000 iedzīvotāju un 16% no tiem ir vecumā no 7 līdz 19 gadiem? Izskaidrojiet savus papildu pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka visi bērni vecumā 7-19 iet skolā, turklāt visās klašu grupās aptuveni vienādi daudz. Tātad Valmierā ir 25'000·0.16 =4'000 skolēnu, katrā klašu grupā aptuveni 4'000/12 $\approx$ 333. Attiecīgi, katrā klašu grupā paralēlklasē ar burtu A mācīsies aptuveni 111 skolēni. Tā kā $111/25 > 4$, vajadzēs vismaz piecas skolas. Redzam, ka ar piecām skolām pietiktu, jo tad A klasēs katrā klašu grupā varētu mācīties 100 līdz 125 skolēni, un 111 skolēniem tas būs optimāli.

2. Ēriks šogad februārī nostrādāja 204 virsstundas. Cik virsstundas viņš strādāja katrā no nedēļas dienām, ja zināms, ka katru dienu (arī brīvdienās) viņš nostrādāja vienādu skaitu stundu? Pamata darba laiks bez virsstundām ir 8 stundas dienā no pirmdienas līdz piektdienai.

Atrisinājums:
Šogad februārī bija 28 dienas jeb 4 nedēļas. Pamata darba laiks nedēļā ir $5 \times 8 = 40$ stundas. Ēriks nedēļā nostrādāja $204 \div 4 = 51$ virsstundu. Tātad kopā vienā nedēļā viņš nostrādāja $40 + 51 = 91$ stundu. Attiecīgi, vienā dienā - $91 \div 7 = 13$ stundas. Tātad darba dienās Ēriks strādāja $13 - 8 = 5$ virsstundas, bet brīvdienās visas 13 nostrādātās stundas bija virsstundas.

3. Matemātiķiem, gatavojot olimpiādi, bija jāizdomā 36 uzdevumi. Viņi izdomāja par vienu uzdevumu dienā mazāk nekā sākotnēji plānots, tādējādi iekavējot noteikto termiņu par 6 dienām. Cik dienas viņi sākotnēji bija plānojuši strādāt?

Atrisinājums:
Sastādām un atrisinām vienādojumu ar mainīgo k, kas apzīmē plānoto uzdevumu skaitu dienā.

$$\begin{aligned} 36/k + 6 &= 36/(k-1) \\ 36(k-1) + 6k(k-1) &= 36k \\ 6k^2 - 6k - 36 &= 0 \\ k^2 - k - 6 &= 0 \\ k &\in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Tā kā negatīvs uzdevumu skaits neder, bija plānots izdomāt 3 uzdevumus dienā. Attiecīgi atbilde ir, ka bija plānots strādāt $36/3 = 12$ dienas. Varam pārbaudīt, ka slinkuma dēļ beigās sanāca strādāt $36/2 = 18$ dienas, par 6 vairāk nekā plānots.

4. Saeimas vēlēšanās Rīgas vēlēšanu apgabalā ievēlami 29 deputāti. Piecu procentu barjeru pārvarējušās partijas ieguva šādus balsu skaitus: SC 64971; PCTVL 27308; ZZS 25851; LPP/LC 22223; TP 35813; JL 46813; TB/LLNK 21488. Aprēķiniet, cik mandātus Rīgas apgabalā ieguva katra partija, atbilstoši vēlēšanu likuma 38. pantam.
Vēlēšanu likuma 38. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 38. panta instrukcijām, dalām iegūtos balsu skaitus katrai partijai ar nepāra skaitļiem 1, 3, 5 utt. Iegūtie dalījumi (noapaļoti) ir tabulā zemāk. Iekrāsojam treknā druknā lielākos dalījums, līdz esam iekrāsojuši kopumā 29 skaitļus. Mazākais no tiem ir 4298. Visi neiekrāsotie skaitļi ir mazāki. Izskaitām treknos skaitļus, lai iegūtu atbilstošos mandātu skaitus; rezultāti ir tabulas pēdējā kolonnā.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
SC	**64971**	**21657**	**12994**	**9282**	**7219**	**5906**	**4998**	**4331**	3822	8
PCTVL	**27308**	**9103**	**5462**	3901	3034	2483	2101	1821	1606	3
ZZS	**25851**	**8617**	**5170**	3693	2872	2350	1989	1723	1521	3
LPP/LC	**22223**	**7408**	**4445**	3175	2469	2020	1709	1482	1307	3
TP	**35813**	**11938**	**7163**	**5116**	3979	3256	2755	2388	2107	4
JL	**46813**	**15604**	**9363**	**6688**	**5201**	4256	3601	3121	2754	5
TB/LLNK	**21488**	**7163**	**4298**	3070	2388	1953	1653	1433	1264	3

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

5. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (1,6), (2,6), (2,2), (3,1), (3,0), (3,2), (3,0) ?

b) (5,5), (2,1), (0,4), (3,3), (2,6), (4,2), (6,1) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+	+	+	+	+	+	6
	2	+		+	+	+	+	+	6
	3		+		+				2
	4						+		1
	5								0
	6					+		+	2
	7								0
	cik	1	2	2	3	3	3	3	17

b) Nē, nevar gadīties, ka piektais rūķītis seko visiem sešiem pārējiem, taču trešajam nav sekotāju.

6. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās un vismaz vienu 12 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 102 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:
Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Sagriežot lapu 12 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 11. Lapu skaits ir pieaudzis par 42, tātad $3x + 11y = 42$, kur x - lapu skaits, kas tika sagriezts 4 daļās; y - lapu skaits, kas tika sagriezts 12 daļās. No tā, ka $3x$ un 42 dalās ar 3, secinām, ka arī $11y$ jādalās ar 3, un attiecīgi y jādalās ar 3. Vienīgā atbilstošā y vērtība ir 3 (ja $y \geq 6$, tad $11y > 42$). Varam aprēķināt arī $x = (42 - 33)/3 = 3$. Tātad kopā tika sagrieztas 6 lapas - 3 no tām 4 daļās un 3 no tām 12 daļās.

7. Poligrāfijas firma piedāvā zīmuļu apdruku par cenām, kas dotas zemāk tabulā. Cik izmaksātu 800 zīmuļu apdruka? Pēc kādas formulas cena tiek aprēķināta?

skaits	400	500	600	1000
cena, eur	128.-	137.50	147.-	185.-

Atrisinājums:
Ievērojot, ka cena par 500 zīmuļiem ir pa vidu 400 un 600 zīmuļu cenām, gribētos minēt, ka 800 zīmuļu cena ir pa vidu 600 un 100 zīmuļu cenai, tātad 166€. Tipiski cenu aprēķina vai nu proporcionāli daudzumam, vai arī pieskaita vēl klāt fiksētu komisiju. Tā kā pirmais variants acīmredzami atkrīt, mēģinām otro: pēc formulas $p = aq + b$, kur p ir cena un q daudzums. Zinot, ka $128 = 400a + b$ un $137.5 = 500a + b$, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un atrodam koeficientus $a = 0.095$, $b = 90$. Pārbaudot šo formulu uz 600 un 1000 zīmuļu cenām, pārliecināmies, ka tā dod pareizas vērtības. Līdzīgi arī $800 \cdot 0.095 + 90 = 166$, tātad mūsu minējums 800 zīmuļu cenai bija pareizs.

8. Orbitreks dzīvo mājas 6. stāvā. Katru dienu laikā no 8:00 līdz 16:00 viņš 4 reizes dodas prom no mājas. Visos pārējos dzīvokļos dzīvo pa vienam kaimiņam, kuri šajā pašā laikā 4 reizes atgriežas mājās. Kura stāva kaimiņus Orbitreks, ejot prom, sastop visbiežāk, ja visos stāvos dzīvokļu skaits ir vienāds, izņemot 6. stāvu, kur ir par vienu vairāk? Visi kaimiņi kāpj vienādi ātri un bez pauzēm.

Atrisinājums:
Intuitīvi ir skaidrs, ka visbiežāk satiks 6. stāva kaimiņus, jo 1. stāva kaimiņus Orbitreks satiks tikai 1. stāvā (ieskaitot kāpnes, kas ved uz to), 2. stāvā kaimiņus 1. un 2. stāvā, ..., 6. stāva kaimiņus 1. stāvā, 2. stāvā, ..., 5. stāvā un 6. stāvā - tātad 6. stāva kaimiņus sastop vismaz par vienu stāvu lielākā posmā nekā jebkuru citu kaimiņu, tātad visbiežāk (ņemot vērā, ka visi kaimiņi vienlīdz bieži nāk mājās). Skaitliski to var izteikt sekojošā veidā. Pieņemsim, ka, lai uzkāptu vai nokāptu vienu stāvu, visiem mājas iedzīvotājiem nepieciešama 1 minūte, un vienkāršības labad var arī pieņemt, ka katrā stāvā dzīvo pa vienam kaimiņam. Tad 1. stāva kaimiņš uz savu dzīvokli kāps 1 minūti, un, zinot, ka viņš mājās atgriežas 4 reizes, dotajā 240 minūšu laika periodā viņu kāpņu telpā varēs sastapt 4 minūtes. Analogi iegūstam, ka 2. stāva kaimiņu kāpņutelpā kopā varēsim satikt 8 minūtes, 3. stāva kaimiņu 12 minūtes, 4. stāvā kaimiņu 16 minūtes, 5. stāva kaimiņu 20 minūtes, un 6. stāva kaimiņu 24 minūtes. Tātad 6. stāva kaimiņu varēs satikt visgarākā laikā periodā, t.i., visbiežāk. Šajā novērtējumā neņēmām vērā sekojošus faktorus, jo to ietekma uz biežumu, ar kādu satiks katra stāva kaimiņus, ir vienlīdz maza visiem kaimiņiem: - ja zemāko stāvu kaimiņi ierodas ļoti agri, tad var gadīties, ka Orbitreks viņus vispār nesatiek, jo nepaspēj nokāpt lejā līdz viņu stāvam (piemēram, ja 1. stāva kaimiņš ierodas laikā no 8:00 līdz 8:05) - starp katru reizi, kad Orbitreks dodas projām, jāpaiet vismaz 10 minūtēm - laiks, kas nepieciešams, lai Orbitreks nokāptu lejā un pēc tam augšā.

9. Doti 2014 skaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir A. Uzrakstiet formulu, ar kuru aprēķināt doto 2014 skaitļu un patvaļīgi izvēlēta skaitļa K vidējo aritmētisko.

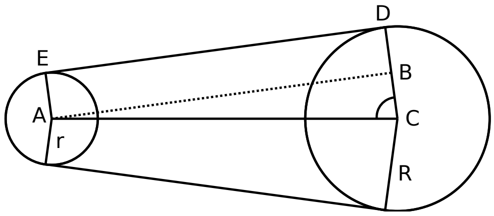
Atrisinājums:
No vidējā aritmētiskā definīcijas seko

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}}{2014} \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} = 2014 \cdot A.$$

Tādēļ vidējo no sākotnējiem 2014 skaitļiem un K varam aprēķināt šādi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} + K}{2015} = \frac{2014 \cdot A + K}{2015}.$$

10. BMX velosipēda priekšējam zobratam ir 44 zobi, aizmugurējam 16. Attālums starp zobratu asīm (centriem) ir 13 collas. Ķēdei katrs posms ir 1/2 collu garš. Cik posmu garu ķēdi vajag, lai tā būtu precīzi nospriegota? *Padoms:* $\cos(80°) = 0.174$, $\sin(80°) = 0.985$.



Atrisinājums:
Katrs zobs atbilst vienam ķēdes posmam, tātad zobratu apkārtmēri ir attiecīgi 22" un 8", un to rādiusi $R = 11/\pi$ un $r = 4/\pi$. ED ir pieskare abām riņķa līnijām, tādēļ rādiusi AE un DC ir tai perpendikulāri. Novelkam AB paralēlu ED, iegūstot taisnstūri $ABDE$. ΔABC ir taisnleņķa, ar hipotenūzu AC garumā 13". Katete BC ir garumā $R - r = 7/\pi \approx 2.23$. Sauksim $\angle ACB$ par α. Tad $\cos(\alpha) = BC/AC \approx 0.17$, un no *padoma* secinām, ka $\alpha \approx 80°$. Seko, ka $ED = AB = AC \cdot \sin(\alpha) \approx 12.8$. Atliek izrēķināt ķēdes ārējo loku garumus. Tā kā to leņķiskie izmēri ir 200° un 160°, iegūstam $22 \cdot 200°/360° = 12.2$ un $8 \cdot 200°/360° = 3.6$. Tātad ķēdes kopējais garums ir vismaz $2 \cdot 12.8 + 12.2 + 3.6 = 41.4$ collas. Tā kā katra posma garums ir 0.5 collas, vajadzēs 83 posmus.

11. Kāds ir lielākais punktu skaits FIFA futbola Pasaules kausa finālturnīra grupu posmā, ar kādu komanda var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai? Kāds ir mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties?
Informācija par turnīra norisi atrodama pielikumā.

Atrisinājums:
Lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai. Apskatīsim, kāpēc 7 punkti nav atbilde šim jautājumam. Grupu posmā katras grupas ietvaros tiek izspēlētas 6 spēles. Maksimālais punktu skaits, ko var iegūt katrā spēlē ir 3, tātad kopā - 18. Lai komanda nekvalificētos, tai grupā jāpaliek 3. vai 4. vietā. Ja komandai 3. vai 4. vietā ir 7 punkti, tad komandām pirmajās divās vietās arī ir jābūt vismaz 7 punktiem. Tātad šīm trim komandām kopā ir jābūt vismaz 21 punktam. Taču kopā maksimālais punktu skaits, ko var nopelnīt, ir 18. Iegūstam pretrunu, kas nozīmē, ka lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai, ir mazāks nekā 7.

Apskatīsim grupu, kurā komanda nekvalificējas nākamajam posmam, lai gan ir ieguvusi 6 punktus. Grupā ir komandas A, B, C un D. Spēļu rezulāti ir sekojoši:
A : B (1 : 0)
A : C (0 : 1)
A : D (3 : 0)
B : C (1 : 0)
B : D (2 : 0)
C : D (1 : 0)
Tabulā redzams, ka komanda C ar 6 punktiem nekvalificējas nākamajam posmam.

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+3	6
B	+2	6
C	+1	6
D	-6	0

Mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties. Ar 1 punktu grupu turnīrā komandai nav iespējams kvalificēties nākamajam posmam. Katra komanda izspēlē 3 spēles. Ja komanda ir saņēmusi tikai 1 punktu, tas nozīmē, ka tā 2 spēlēs ir zaudējusi, tātad ir vismaz 2 komandas ar vismaz 3 punktiem.

Komanda var kvalificēties nākamajam posmam ar 2 punktiem. Piemēram, šādā gadījumā, kad

kvalificējas komanda B ar 2 punktiem:
A : B (1 : 0)
A : C (2 : 0)
A : D (3 : 0)
B : C (0 : 0)
B : D (0 : 0)
C : D (0 : 0)

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+6	9
B	-1	2
C	-2	2
D	-3	2

12. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^3 = 2$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $6y^3$ dalās ar 3, apskatām iespējamos x^2 atlikumus. Ja x atlikums ir 0, 1 vai 2, tad x^2 atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

13. Gāzes caurule sastāv no 100 posmiem, un ir zināms, ka vienā no tiem ir sūce (caurums), jo vienā caurules galā tiek pumpēti $20m^3/h$, bet otrā nonāk tikai $19m^3/h$. Posmu savienojumu vietas ir pilnīgi drošas pret sūcēm, un tajās ir iespējams nomērīt gāzes plūsmu. Kāds ir iespējami mazākais mērījumu skaits, pēc kuriem noteikti būsim atraduši posmu, kurā ir sūce? Nav japierāda, ka atrasts mazākais mērījumu skaits.

Atrisinājums:
Ir iespējams to izdarīt ar 7 mērījumiem: vienmēr mērot pa vidu caurules intervālam, kurā zināms, ka ir sūce. Pirmais mērījums būs starp 50. un 51. posmu un tādējādi aizdomīgo posmu skaits samazināsies no 100 uz 50. Pēc otrā mērījuma atliek 25 kandidāti, pēc 3. atliek 13 (vai mazāk), tad attiecīgi 7, 4, 2, un pēc septītā mērījuma būs atlicis tikai viens iespējamais caurais posms.
Piebilde. Lai gan tas nebija prasīts, ir viegli pierādīt, ka ar 6 vai mazāk mērījumiem nevar garantēt, ka atradīsim vainīgo posmu. Katram mērījumam ir iespējami divi iznākumi: sūce ir lejup vai augšup no mērījuma vietas, tātad 6 mērījumiem ir $2^6 = 64$ iespējamas iznākumu virknes, un katrai no tām jānoved pie kāda slēdziena - caurā posma. Taču jebkurš no 100 posmiem var būt caurs, tātad ar 6 mērījumiem nevar visos gadījumos pareizi atrast vainīgo posmu.

14. Grīns un Tao pierādīja, ka jebkuram naturālam n eksistē aritmētiska progresija garumā n, kura sastāv tikai no pirmskaitļiem. Pierādīt, ka neeksistē bezgalīgi gara šāda aritmētiska progresija.

Atrisinājums:
Ja aritmētiskās progresijas pirmais loceklis ir $a_1 = p$ un solis ir d, tad k-to locekli iegūst pēc formulas $a_k = p + d(k-1)$. Ja apskatām $p+1$-mo locekli, iegūstam $a_{p+1} = p + d(p+1-1) = (d+1)p$, tātad tas nevar būt pirmskaitlis (jo tas dalās ar pirmskaitli p un ar $d+1 > 1$). Tādēļ šīs pirmskaitļu aritmētiskās progresijas garums nevar būt lielāks par p. Šis uzdevums parāda, ka matemātikā jēdzieniem "neierobežoti garš" un "bezgalīgs" ir būtiski atšķirīgas nozīmes.

15. Pieci draugi lido uz Maroku ar lidmašīnu, kurā ir 16 rindas un katrā rindā ir 5 sēdvietas, turklāt visas no tām ir aizpildītas. Tā kā viņi lido ar lidsabiedrību Rajaneir, viņi nevar izvēlēties, kur sēdēt, tādēļ viņu sēdvietas ir patvaļīgi izkaisītas pa lidmašīnu. Katrs no draugiem var vairākkārt sarunāt apmainīties vietām ar pa kreisi, pa labi, priekšā vai aizmugurē sēdošo pasažieri (ja starp divām sēdvietām ir lidmašīnas eja, tad uzskatām, ka tās atrodas blakus). Kāds ir mazākais pārsēšanos skaits, pie kura vienmēr, neatkarīgi no sākotnējā draugu sēdvietu sadalījuma pa lidmašīnu, kādi divi no viņiem spēs apsēsties viens otram blakus?

Atrisinājums:

Lidmašīnas sēdvietu plānu varam uzskatīt par 16×5 rūtiņu tīklu. Šo tīklu varam sadalīt 4 vienādos taisnstūros ar izmēriem 4×5. Tad, zinot, ka lidmašīnā lido 5 draugi, būs skaidrs - kādā no taisnstūriem būs apsēdušies vismaz 2 draugi. Tādēļ pārsēšanos skaits, kas būs nepieciešams, lai no šī taisnstūra kādi 2 draugi nonāktu viens otram blakus, būs ne vairāk kā 6 pārsēšanās: $(\text{taisntūra platums} - 1) + (\text{taisntūra augstums} - 1) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Attiecīgi mazākais pārsēšanos skaits, lai 2 kādi draugi sēdētu blakus, nevarēs būt lielāks par 6. Atliek uzrādīt situāciju, kurā nepieciešamas vismaz 6 pārsēšanās - skat. shematisku attēlojumu zemāk.

			X								X				
X							X								X

X - draugu sēdvietas

atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

10. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Skolā, kurā mācās skolēni no 1. līdz 12. klasei, optimālais paralēlklašu skaits katrā no klašu grupām ir 3 un optimālais skolēnu skaits katrā klasē ir no 20 līdz 25. Kāds ir optimālais skolu skaits Valmierā, lai visiem bērniem būtu kur mācīties, ja tajā dzīvo 25'000 iedzīvotāju un 16% no tiem ir vecumā no 7 līdz 19 gadiem? Izskaidrojiet savus papildu pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka visi bērni vecumā 7-19 iet skolā, turklāt visās klašu grupās aptuveni vienādi daudz. Tātad Valmierā ir 25'000·0.16 =4'000 skolēnu, katrā klašu grupā aptuveni 4'000/12 $\approx$ 333. Attiecīgi, katrā klašu grupā paralēlklasē ar burtu A mācīsies aptuveni 111 skolēni. Tā kā $111/25 > 4$, vajadzēs vismaz piecas skolas. Redzam, ka ar piecām skolām pietiktu, jo tad A klasēs katrā klašu grupā varētu mācīties 100 līdz 125 skolēni, un 111 skolēniem tas būs optimāli.

2. Matemātiķiem, gatavojot olimpiādi, bija jāizdomā 36 uzdevumi. Viņi izdomāja par vienu uzdevumu dienā mazāk nekā sākotnēji plānots, tādējādi iekavējot noteikto termiņu par 6 dienām. Cik dienas viņi sākotnēji bija plānojuši strādāt?

Atrisinājums:
Sastādām un atrisinām vienādojumu ar mainīgo k, kas apzīmē plānoto uzdevumu skaitu dienā.

$$\begin{aligned} 36/k + 6 &= 36/(k-1) \\ 36(k-1) + 6k(k-1) &= 36k \\ 6k^2 - 6k - 36 &= 0 \\ k^2 - k - 6 &= 0 \\ k &\in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Tā kā negatīvs uzdevumu skaits neder, bija plānots izdomāt 3 uzdevumus dienā. Attiecīgi atbilde ir, ka bija plānots strādāt $36/3 = 12$ dienas. Varam pārbaudīt, ka slinkuma dēļ beigās sanāca strādāt $36/2 = 18$ dienas, par 6 vairāk nekā plānots.

3. Saeimas vēlēšanās Rīgas vēlēšanu apgabalā ievēlami 29 deputāti. Piecu procentu barjeru pārvarējušās partijas ieguva šādus balsu skaitus: SC 64971; PCTVL 27308; ZZS 25851; LPP/LC 22223; TP 35813; JL 46813; TB/LLNK 21488. Aprēķiniet, cik mandātus Rīgas apgabalā ieguva katra partija, atbilstoši vēlēšanu likuma 38. pantam.
Vēlēšanu likuma 38. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 38. panta instrukcijām, dalām iegūtos balsu skaitus katrai partijai ar nepāra skaitļiem 1, 3, 5 utt. Iegūtie dalījumi (noapaļoti) ir tabulā zemāk. Iekrāsojam treknā drukā lielākos dalījums, līdz esam iekrāsojuši kopumā 29 skaitļus. Mazākais no tiem ir 4298. Visi neiekrāsotie skaitļi ir mazāki. Izskaitām treknos skaitļus, lai iegūtu atbilstošos mandātu skaitus; rezultāti ir tabulas pēdējā kolonnā.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
SC	**64971**	**21657**	**12994**	**9282**	**7219**	**5906**	**4998**	**4331**	3822	8
PCTVL	**27308**	**9103**	**5462**	3901	3034	2483	2101	1821	1606	3
ZZS	**25851**	**8617**	**5170**	3693	2872	2350	1989	1723	1521	3
LPP/LC	**22223**	**7408**	**4445**	3175	2469	2020	1709	1482	1307	3
TP	**35813**	**11938**	**7163**	**5116**	3979	3256	2755	2388	2107	4
JL	**46813**	**15604**	**9363**	**6688**	**5201**	4256	3601	3121	2754	5
TB/LLNK	**21488**	**7163**	**4298**	3070	2388	1953	1653	1433	1264	3

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

4. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (1,6), (2,6), (2,2), (3,1), (3,0), (3,2), (3,0) ?

b) (5,5), (2,1), (0,4), (3,3), (2,6), (4,2), (6,1) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+	+	+	+	+	+	6
	2	+		+	+	+	+	+	6
	3		+		+				2
	4						+		1
	5								0
	6					+		+	2
	7								0
	cik	1	2	2	3	3	3	3	17

b) Nē, nevar gadīties, ka piektais rūķītis seko visiem sešiem pārējiem, taču trešajam nav sekotāju.

5. Friziere augustā piedāvāja matu griezumu par īpašu cenu (8.23€), jo "2014. gada augusts ir vienīgais tavā dzīvē, kurā būs 5 piektdienas, 5 sestdienas un 5 svētdienas! Pēdējo reizi tas bija 1191. gadā, nākamreiz būs 2837. gadā; reizi 823 gados šis fenomens!" Vai (un kāpēc) viņai ir taisnība? Ja nē, izskaidro, cik bieži patiesībā notiek šāds fenomens!

Atrisinājums:

Tas gadās tieši tajos gados, kad 1. augusts ir piektdiena. Parastā gadā ir 365 dienas, tātad 52 nedēļas un 1 diena. Nākamgad ir parasts gads, un 1. augusts būs sestdiena un tā katru gadu pa vienai dienai klāt. Garajā gadā ir 366 dienas, tātad tajā 1. augusts būs par divām nedēļas dienām vēlāk nekā iepriekšējā. Katrs ceturtais gads ir garais (izņemot, ja gadskaitlis dalās ar 100, bet ne 400 - bet šo gadījumu ignorēsim). Nākamais garais gads ir 2016. Tātad, sākot ar 2014. gadu, 1. augusts iekritīs šādās dienās:

…	…	2014	'15	*'16*	'17	'18	'19	*'20*	'21	'22	'23	*'24*	'25	'26	'27
…	…	**Pk**	Se	Pr	Ot	Tr	Ce	Se	Sv	Pr	Ot	Ce	**Pk**	Se	Sv
2028	'29	'30	'31	*'32*	'33	'34	'35	*'36*	'37	'38	'39	*'40*	'41	'42	…
Ot	Tr	Ce	**Pk**	Sv	Pr	Ot	Tr	**Pk**	Se	Sv	Pr	Tr	Ce	**Pk**	…

(garie gadi *kursīvā*, piektdienas **treknā drukā**). 2042. gada 1. augusts atkal ir piektdienā, turklāt pēc diviem gadiem seko garais gads, tātad identisks 28 gadu cikls sākas no jauna. Redzam, ka "fenomens" atkārtojas ritmā ik pa 11-6-5-6 gadiem, un mūsu dzīvē būs vēl daudz šādu augustu.

6. *Capital One (CO)* akcijas pirms gada maksāja 30\$. Biržā par 3.25\$ varēja nopirkt loterijas biļeti (t.s. *opciju*), kas pēc gada izmaksātu laimestu $x - 40\$$ gadījumā, ja *CO* akcijas tajā brīdī maksā x dolārus, un x ir vairāk nekā 40\$. *Cornwall Capital Management* par 26'000\$ iegādājās daudz šādu opciju un pēc gada saņēma laimestu 480'000\$. Cik tajā brīdī maksāja *CO* akcijas?

Atrisinājums:
CCM nopirka 26'000/3.25=8'000 opcijas. Tātad laimests katrai opcijai bija 480'000/8'000=60\$. Tātad *CO* akciju vērtība bija pieaugusi līdz 40+60=100 dolāriem.

7. Edgars ar Olgu bija sešu dienu ilgā velobraucienā Toskānā. Pirmajā dienā viņi nobrauca par 3km vairāk nekā otrajā. Trešajā dienā - divreiz vairāk nekā ceturtajā, taču vidēji tikpat, cik pirmajā. Pirmajā un piektajā dienā kopā sanāca 100km - tikpat, cik saskaitot trešajā un sestajā dienā nobraukto. Cik kilometrus viņi nobrauca katrā no dienām, ja kopumā odometrs rādīja 277km?

Atrisinājums:
Apzīmējam 1.-6. dienā nobrauktos km ar a, b, c, d, e, f un sastādām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ c = 2d \\ c + d = 2a \\ a + e = 100 \\ c + f = 100 \\ a + b + c + d + e + f = 277 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ c = 2d \\ 3d = 2a \\ e = 100 - a \\ f = 100 - 2d \\ a + a - 3 + 2d + d + 100 - a + 100 - 2d = 277 \end{cases}$$

Ņemam trešo rindu un vienkāršojam pēdējo, lai atrastu a un d, un no tiem - pārējos mainīgos:

$$\begin{cases} 3d = 2a \\ a + d = 80 \end{cases} \Rightarrow \quad 3(80 - a) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 48, b = 45, c = 64, d = 32, e = 52, f = 36.$$

Šie arī attiecīgi ir nobrauktie attālumi katrā no dienām.

8. Kāds ir lielākais punktu skaits FIFA futbola Pasaules kausa finālturnīra grupu posmā, ar kādu komanda var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai? Kāds ir mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties?
Informācija par turnīra norisi atrodama pielikumā.

Atrisinājums:
Lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai. Apskatīsim, kāpēc 7 punkti nav atbilde šim jautājumam. Grupu posmā katras grupas ietvaros tiek izspēlētas 6 spēles. Maksimālais punktu skaits, ko var iegūt katrā spēlē ir 3, tātad kopā - 18. Lai komanda nekvalificētos, tai grupā jāpaliek 3. vai 4. vietā. Ja komandai 3. vai 4. vietā ir 7 punkti, tad komandām pirmajās divās vietās arī ir jābūt vismaz 7 punktiem. Tātad šīm trim komandām kopā ir jābūt vismaz 21 punktam. Taču kopā maksimālais punktu skaits, ko var nopelnīt, ir 18. Iegūstam pretrunu, kas nozīmē, ka lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai, ir mazāks nekā 7.

Apskatīsim grupu, kurā komanda nekvalificējas nākamajam posmam, lai gan ir ieguvusi 6 punktus. Grupā ir komandas A, B, C un D. Spēļu rezulāti ir sekojoši:
A : B (1 : 0)
A : C (0 : 1)
A : D (3 : 0)
B : C (1 : 0)
B : D (2 : 0)
C : D (1 : 0)
Tabulā redzams, ka komanda C ar 6 punktiem nekvalificējas nākamajam posmam.

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+3	6
B	+2	6
C	+1	6
D	-6	0

Mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties. Ar 1 punktu grupu turnīrā komandai nav iespējams kvalificēties nākamajam posmam. Katra komanda izspēlē 3 spēles. Ja komanda ir saņēmusi tikai 1 punktu, tas nozīmē, ka tā 2 spēlēs ir zaudējusi, tātad ir vismaz 2 komandas ar vismaz 3 punktiem.

Komanda var kvalificēties nākamajam posmam ar 2 punktiem. Piemēram, šādā gadījumā, kad kvalificējas komanda B ar 2 punktiem:
A : B (1 : 0)
A : C (2 : 0)
A : D (3 : 0)
B : C (0 : 0)
B : D (0 : 0)
C : D (0 : 0)

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+6	9
B	-1	2
C	-2	2
D	-3	2

9. Pierādīt, ka jebkuriem naturāliem skaitļiem n un k iespējams pakāpi n^k izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu.

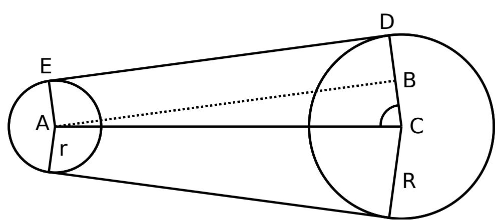
Atrisinājums:
n pēc kārtas ņemti nepāra skaitļi veido aritmētisko progresiju $a, a+2, a+4, \ldots\ a+2(n-1)$, kuras summu aprēķina pēc formulas $(a+a+2(n-1))n/2$. Lai atrastu a, risinām vienādojumu

$$\begin{aligned} n^k &= (a+a+2(n-1))n/2 \\ n^{k-1} &= a+n-1 \\ a &= n^{k-1}-n+1. \end{aligned}$$

Atliek pārbaudīt, vai a ir nepāra. Ja $k-1 \geq 1$, tad n^{k-1} un n paritāte sakrīt, līdz ar to starpība ir pāra skaitlis. Pieskaitot 1, iegūstam nepāra skaitli a. Ja $k-1=0$, t.i. $k=1$, tad $n^{k-1}=n^0=1$. Ja n ir nepāra, tad pamatojam kā iepriekš. Ja n ir pāra, tad iegūstam, ka atrisinājums ir $a=1-n+1$, pāra skaitlis.
Tātad pakāpi n^k iespējams izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu tad, ja $k>1$ vai arī, ja $k=1$ un n ir nepāra. Atlikušajā gadījumā ($k=1$, n pāra) tas nav iespējams.

10. BMX velosipēda priekšējam zobratam ir 44 zobi, aizmugurējam 16. Attālums starp zobratu asīm (centriem) ir 13 collas. Ķēdei katrs posms ir 1/2 collu garš. Cik posmu garu ķēdi vajag, lai tā būtu precīzi nospriegota? *Padoms:* $\cos(80°)=0.174$, $\sin(80°)=0.985$.

Atrisinājums:



Katrs zobs atbilst vienam ķēdes posmam, tātad zobratu apkārtmēri ir attiecīgi 22" un 8", un to rādiusi $R = 11/\pi$ un $r = 4/\pi$. ED ir pieskare abām riņķa līnijām, tādēļ rādiusi AE un DC ir tai perpendikulāri. Novelkam AB paralēlu ED, iegūstot taisnstūri $ABDE$. ΔABC ir taisnleņķa, ar hipotenūzu AC garumā 13". Katete BC ir garumā $R - r = 7/\pi \approx 2.23$. Sauksim $\angle ACB$ par α. Tad $\cos(\alpha) = BC/AC \approx 0.17$, un no *padoma* secinām, ka $\alpha \approx 80°$. Seko, ka $ED = AB = AC \cdot \sin(\alpha) \approx 12.8$. Atliek izrēķināt ķēdes ārējo loku garumus. Tā kā to leņķiskie izmēri ir 200° un 160°, iegūstam $22 \cdot 200°/360° = 12.2$ un $8 \cdot 200°/360° = 3.6$. Tātad ķēdes kopējais garums ir vismaz $2 \cdot 12.8 + 12.2 + 3.6 = 41.4$ collas. Tā kā katra posma garums ir 0.5 collas, vajadzēs 83 posmus.

11. Pierādīt, ka vienādojumam $4x^2 - 5y^2 = 12$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 5.

Atrisinājums:
12 dalot ar 5, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $5y^2$ dalās ar 5, apskatām iespējamos $4x^2$ atlikumus. Ja x atlikums ir 0,1,2,3 vai 4, tad $4x^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 4, 1, 1, 4. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 5 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

12. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir izmantoti tieši 2 dažādi cipari?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka meklētais četrciparu skaitlis sastāv no cipariem a un b, kur a ir pirmais cipars četrciparu skaitlī. Ciparu a mēs varam izvēlēties 9 variantos (1-9), savukārt b varēsim izvēlēties 9 variantos (visi 10 cipari, izņemot jau 1. pozīcijā izvēlēto). Tātad $9 \cdot 9 = 81$ varianti. Apskatīsim, cik variantos varēsim izveidot četrciparu skaitli no izvēlētajiem cipariem a un b. Pirmajā pozīcijā varēs būt tikai a, savukārt nākamajās trijās pozīcijās a vai b - kopā $2 \cdot 2 \cdot 2$ varianti. Jāņem vērā, ka šie varianti iekļauj arī skaitli *aaaa*, kurš neatbilst nosacījumiem. Tātad četrciparu skaitli no diviem dažādiem cipariem varam izveidot $9 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 1) = 567$ veidos.

13. Martinam Gārdneram oktobrī atzīmēja 100. gadadienu. $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$. Vai vienādība $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ ir patiesa visiem naturāliem n?

Atrisinājums:
Atrisinājumam izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Ar A(k) apzīmēsim vienādību

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2.$$

Indukcijas bāze. $A(1)$ ir patiess, jo $1^3 = 1 = 1^2$.
Induktīvā pāreja. Pārliecināsimies, ka $A(k + 1)$ ir patiess, ja $A(k)$ ir patiess.
Risinājumā izmantosim vienādību $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2 = ((1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1))^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + k)(k + 1) + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + 2 \cdot \frac{k(k + 1)}{2} \cdot (k + 1) + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + k(k + 1)^2 + (k + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)^3 = \\
&= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3, \text{ k.b.j.}
\end{aligned}$$

14. Grīns un Tao pierādīja, ka jebkuram naturālam n eksistē aritmētiska progresija garumā n, kura sastāv tikai no pirmskaitļiem. Pierādīt, ka neeksistē bezgalīgi gara šāda aritmētiska progresija.

Atrisinājums:
Ja aritmētiskās progresijas pirmais loceklis ir $a_1 = p$ un solis ir d, tad k-to locekli iegūst pēc formulas $a_k = p + d(k-1)$. Ja apskatām $p+1$-mo locekli, iegūstam $a_{p+1} = p + d(p+1-1) = (d+1)p$, tātad tas nevar būt pirmskaitlis (jo tas dalās ar pirmskaitli p un ar $d+1 > 1$). Tādēļ šīs pirmskaitļu aritmētiskās progresijas garums nevar būt lielāks par p. Šis uzdevums parāda, ka matemātikā jēdzieniem “neierobežoti garš” un “bezgalīgs” ir būtiski atšķirīgas nozīmes.

15. Pieci draugi lido uz Maroku ar lidmašīnu, kurā ir 16 rindas un katrā rindā ir 5 sēdvietas, turklāt visas no tām ir aizpildītas. Tā kā viņi lido ar lidsabiedrību Rajaneir, viņi nevar izvēlēties, kur sēdēt, tādēļ viņu sēdvietas ir patvaļīgi izkaisītas pa lidmašīnu. Katrs no draugiem var vairākkārt sarunāt apmainīties vietām ar pa kreisi, pa labi, priekšā vai aizmugurē sēdošo pasažieri (ja starp divām sēdvietām ir lidmašīnas eja, tad uzskatām, ka tās atrodas blakus). Kāds ir mazākais pārsēšanos skaits, pie kura vienmēr, neatkarīgi no sākotnējā draugu sēdvietu sadalījuma pa lidmašīnu, kādi divi no viņiem spēs apsēsties viens otram blakus?

Atrisinājums:
Lidmašīnas sēdvietu plānu varam uzskatīt par 16×5 rūtiņu tīklu. Šo tīklu varam sadalīt 4 vienādos taisnstūros ar izmēriem 4×5. Tad, zinot, ka lidmašīnā lido 5 draugi, būs skaidrs - kādā no taisnstūriem būs apsēdušies vismaz 2 draugi. Tādēļ pārsēšanos skaits, kas būs nepieciešams, lai no šī taisnstūra kādi 2 draugi nonāktu viens otram blakus, būs ne vairāk kā 6 pārsēšanās: (taisntūra platums $- 1) +$ (taisntūra augstums $- 1) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Attiecīgi mazākais pārsēšanos skaits, lai 2 kādi draugi sēdētu blakus, nevarēs būt lielāks par 6. Atliek uzrādīt situāciju, kurā nepieciešamas vismaz 6 pārsēšanās - skat. shematisku attēlojumu zemāk.

			X								X				
X							X								X

X - draugu sēdvietas

atvērtā kopa 2014

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Matemātiķiem, gatavojot olimpiādi, bija jāizdomā 36 uzdevumi. Viņi izdomāja par vienu uzdevumu dienā mazāk nekā sākotnēji plānots, tādējādi iekavējot noteikto termiņu par 6 dienām. Cik dienas viņi sākotnēji bija plānojuši strādāt?

Atrisinājums:
Sastādām un atrisinām vienādojumu ar mainīgo k, kas apzīmē plānoto uzdevumu skaitu dienā.

$$\begin{aligned} 36/k + 6 &= 36/(k-1) \\ 36(k-1) + 6k(k-1) &= 36k \\ 6k^2 - 6k - 36 &= 0 \\ k^2 - k - 6 &= 0 \\ k &\in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Tā kā negatīvs uzdevumu skaits neder, bija plānots izdomāt 3 uzdevumus dienā. Attiecīgi atbilde ir, ka bija plānots strādāt $36/3 = 12$ dienas. Varam pārbaudīt, ka slinkuma dēļ beigās sanāca strādāt $36/2 = 18$ dienas, par 6 vairāk nekā plānots.

2. Saeimas vēlēšanās Rīgas vēlēšanu apgabalā ievēlami 29 deputāti. Piecu procentu barjeru pārvarējušās partijas ieguva šādus balsu skaitus: SC 64971; PCTVL 27308; ZZS 25851; LPP/LC 22223; TP 35813; JL 46813; TB/LLNK 21488. Aprēķiniet, cik mandātus Rīgas apgabalā ieguva katra partija, atbilstoši vēlēšanu likuma 38. pantam.
Vēlēšanu likuma 38. pants atrodams pielikumā.

Atrisinājums:
Sekojot vēlēšanu likuma 38. panta instrukcijām, dalām iegūtos balsu skaitus katrai partijai ar nepāra skaitļiem 1, 3, 5 utt. Iegūtie dalījumi (noapaļoti) ir tabulā zemāk. Iekrāsojam treknā druknā lielākos dalījums, līdz esam iekrāsojuši kopumā 29 skaitļus. Mazākais no tiem ir 4298. Visi neiekrāsotie skaitļi ir mazāki. Izskaitām treknos skaitļus, lai iegūtu atbilstošos mandātu skaitus; rezultāti ir tabulas pēdējā kolonnā.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
SC	**64971**	**21657**	**12994**	**9282**	**7219**	**5906**	**4998**	**4331**	3822	8
PCTVL	**27308**	**9103**	**5462**	3901	3034	2483	2101	1821	1606	3
ZZS	**25851**	**8617**	**5170**	3693	2872	2350	1989	1723	1521	3
LPP/LC	**22223**	**7408**	**4445**	3175	2469	2020	1709	1482	1307	3
TP	**35813**	**11938**	**7163**	**5116**	3979	3256	2755	2388	2107	4
JL	**46813**	**15604**	**9363**	**6688**	**5201**	4256	3601	3121	2754	5
TB/LLNK	**21488**	**7163**	**4298**	3070	2388	1953	1653	1433	1264	3

Piebilde. Šie skaitļi atbilst 9. Saeimas vēlēšanām.

3. Septiņi rūķīši reģistrējās Tviterī un daži sāka sekot citiem (tikai savā starpā). Pāris (a, b) apzīmē kāda rūķīša sekotāju skaitu a un izsekoto skaitu b. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi septiņiem rūķīšiem šie pāri ir

a) (1,6), (2,6), (2,2), (3,1), (3,0), (3,2), (3,0) ?

b) (5,5), (2,1), (0,4), (3,3), (2,6), (4,2), (6,1) ?

Atrisinājums:

a) Jā, ir iespējams, piemēram, kā attēlots tabulā (ar + atzīmēts, kurš rūķītis seko kuram):

		kam							
		1	2	3	4	5	6	7	cik
kas	1		+	+	+	+	+	+	6
	2	+		+	+	+	+	+	6
	3		+		+				2
	4						+		1
	5								0
	6					+		+	2
	7								0
	cik	1	2	2	3	3	3	3	17

b) Nē, nevar gadīties, ka piektais rūķītis seko visiem sešiem pārējiem, taču trešajam nav sekotāju.

4. Friziere augustā piedāvāja matu griezumu par īpašu cenu (8.23€), jo "2014. gada augusts ir vienīgais tavā dzīvē, kurā būs 5 piektdienas, 5 sestdienas un 5 svētdienas! Pēdējo reizi tas bija 1191. gadā, nākamreiz būs 2837. gadā; reizi 823 gados šis fenomens!" Vai (un kāpēc) viņai ir taisnība? Ja nē, izskaidro, cik bieži patiesībā notiek šāds fenomens!

Atrisinājums:

Tas gadās tieši tajos gados, kad 1. augusts ir piektdiena. Parastā gadā ir 365 dienas, tātad 52 nedēļas un 1 diena. Nākamgad ir parasts gads, un 1. augusts būs sestdiena un tā katru gadu pa vienai dienai klāt. Garajā gadā ir 366 dienas, tātad tajā 1. augusts būs par divām nedēļas dienām vēlāk nekā iepriekšējā. Katrs ceturtais gads ir garais (izņemot, ja gadskaitlis dalās ar 100, bet ne 400 - bet šo gadījumu ignorēsim). Nākamais garais gads ir 2016. Tātad, sākot ar 2014. gadu, 1. augusts iekritīs šādās dienās:

...	...	2014	’15	*’16*	’17	’18	’19	*’20*	’21	’22	’23	*’24*	’25	’26	’27
...	...	**Pk**	Se	Pr	Ot	Tr	Ce	Se	Sv	Pr	Ot	Ce	**Pk**	Se	Sv
2028	’29	’30	’31	*’32*	’33	’34	’35	*’36*	’37	’38	’39	*’40*	’41	’42	...
Ot	Tr	Ce	**Pk**	Sv	Pr	Ot	Tr	**Pk**	Se	Sv	Pr	Tr	Ce	**Pk**	...

(garie gadi *kursīvā*, piektdienas **treknā drukā**). 2042. gada 1. augusts atkal ir piektdienā, turklāt pēc diviem gadiem seko garais gads, tātad identisks 28 gadu cikls sākas no jauna. Redzam, ka "fenomens" atkārtojas ritmā ik pa 11-6-5-6 gadiem, un mūsu dzīvē būs vēl daudz šādu augustu.

5. Mārtiņam bija 60 vēstuļu papīra lapas. Marta gribēja saņemt vēstules biežāk un dažas no vēstuļu papīra lapām sagrieza 4 daļās un vismaz vienu 12 daļās. Mārtiņš lapas tērēja uzmanīgi un uz katras lapas rakstīja pa vienai vēstulei. Marta saņēma 102 vēstules no Mārtiņa. Cik papīra lapas sagrieza Marta?

Atrisinājums:

Sagriežot lapu 4 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 3. Sagriežot lapu 12 daļās, kopējais lapu skaits pieaug par 11. Lapu skaits ir pieaudzis par 42, tātad $3x + 11y = 42$, kur x - lapu skaits, kas tika sagriezts 4 daļās; y - lapu skaits, kas tika sagriezts 12 daļās. No tā, ka $3x$ un 42 dalās ar 3, secinām, ka arī $11y$ jādalās ar 3, un attiecīgi y jādalās ar 3. Vienīgā atbilstošā y vērtība ir 3 (ja $y \geq 6$, tad $11y > 42$). Varam aprēķināt arī $x = (42 - 33)/3 = 3$. Tātad kopā tika sagrieztas 6 lapas - 3 no tām 4 daļās un 3 no tām 12 daļās.

6. *Capital One (CO)* akcijas pirms gada maksāja 30$. Biržā par 3.25$ varēja nopirkt loterijas biļeti (t.s. *opciju*), kas pēc gada izmaksātu laimestu $x - 40$$ gadījumā, ja *CO* akcijas tajā brīdī maksā

x dolārus, un x ir vairāk nekā 40$. *Cornwall Capital Management* par 26'000$ iegādājās daudz šādu opciju un pēc gada saņēma laimestu 480'000$. Cik tajā brīdī maksāja *CO* akcijas?

Atrisinājums:
CCM nopirka 26'000/3.25=8'000 opcijas. Tātad laimests katrai opcijai bija 480'000/8'000=60$. Tātad *CO* akciju vērtība bija pieaugusi līdz 40+60=100 dolāriem.

7. Edgars ar Olgu bija sešu dienu ilgā velobraucienā Toskānā. Pirmajā dienā viņi nobrauca par 3km vairāk nekā otrajā. Trešajā dienā - divreiz vairāk nekā ceturtajā, taču vidēji tikpat, cik pirmajā. Pirmajā un piektajā dienā kopā sanāca 100km - tikpat, cik saskaitot trešajā un sestajā dienā nobraukto. Cik kilometrus viņi nobrauca katrā no dienām, ja kopumā odometrs rādīja 277km?

Atrisinājums:
Apzīmējam 1.-6. dienā nobrauktos km ar a, b, c, d, e, f un sastādām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ c = 2d \\ c + d = 2a \\ a + e = 100 \\ c + f = 100 \\ a + b + c + d + e + f = 277 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ c = 2d \\ 3d = 2a \\ e = 100 - a \\ f = 100 - 2d \\ a + a - 3 + 2d + d + 100 - a + 100 - 2d = 277 \end{cases}$$

Ņemam trešo rindu un vienkāršojam pēdējo, lai atrastu a un d, un no tiem - pārējos mainīgos:

$$\begin{cases} 3d = 2a \\ a + d = 80 \end{cases} \Rightarrow \quad 3(80 - a) = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 48, b = 45, c = 64, d = 32, e = 52, f = 36.$$

Šie arī attiecīgi ir nobrauktie attālumi katrā no dienām.

8. Kāds ir lielākais punktu skaits FIFA futbola Pasaules kausa finālturnīra grupu posmā, ar kādu komanda var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai? Kāds ir mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties?
Informācija par turnīra norisi atrodama pielikumā.

Atrisinājums:
Lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai. Apskatīsim, kāpēc 7 punkti nav atbilde šim jautājumam. Grupu posmā katras grupas ietvaros tiek izspēlētas 6 spēles. Maksimālais punktu skaits, ko var iegūt katrā spēlē ir 3, tātad kopā - 18. Lai komanda nekvalificētos, tai grupā jāpaliek 3. vai 4. vietā. Ja komandai 3. vai 4. vietā ir 7 punkti, tad komandām pirmajās divās vietās arī ir jābūt vismaz 7 punktiem. Tātad šīm trim komandām kopā ir jābūt vismaz 21 punktam. Taču kopā maksimālais punktu skaits, ko var nopelnīt, ir 18. Iegūstam pretrunu, kas nozīmē, ka lielākais punktu skaits, ar kuru var nekvalificēties izslēgšanas spēļu kārtai, ir mazāks nekā 7.

Apskatīsim grupu, kurā komanda nekvalificējas nākamajam posmam, lai gan ir ieguvusi 6 punktus. Grupā ir komandas A, B, C un D. Spēļu rezultāti ir sekojoši:
A : B (1 : 0)
A : C (0 : 1)
A : D (3 : 0)
B : C (1 : 0)
B : D (2 : 0)
C : D (1 : 0)
Tabulā redzams, ka komanda C ar 6 punktiem nekvalificējas nākamajam posmam.

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+3	6
B	+2	6
C	+1	6
D	-6	0

Mazākais punktu skaits, ar kuru komanda var kvalificēties. Ar 1 punktu grupu turnīrā komandai nav iespējams kvalificēties nākamajam posmam. Katra komanda izspēlē 3 spēles. Ja komanda ir saņēmusi tikai 1 punktu, tas nozīmē, ka tā 2 spēlēs ir zaudējusi, tātad ir vismaz 2 komandas ar vismaz 3 punktiem.

Komanda var kvalificēties nākamajam posmam ar 2 punktiem. Piemēram, šādā gadījumā, kad kvalificējas komanda B ar 2 punktiem:
A : B (1 : 0)
A : C (2 : 0)
A : D (3 : 0)
B : C (0 : 0)
B : D (0 : 0)
C : D (0 : 0)

Komanda	Vārtu starpība	Punkti
A	+6	9
B	-1	2
C	-2	2
D	-3	2

9. Pierādīt, ka jebkuriem naturāliem skaitļiem n un k iespējams pakāpi n^k izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu.

Atrisinājums:
n pēc kārtas ņemti nepāra skaitļi veido aritmētisko progresiju $a, a+2, a+4, \ldots\ a+2(n-1)$, kuras summu aprēķina pēc formulas $(a+a+2(n-1))n/2$. Lai atrastu a, risinām vienādojumu

$$\begin{aligned} n^k &= (a+a+2(n-1))n/2 \\ n^{k-1} &= a+n-1 \\ a &= n^{k-1}-n+1. \end{aligned}$$

Atliek pārbaudīt, vai a ir nepāra. Ja $k-1 \geq 1$, tad n^{k-1} un n paritāte sakrīt, līdz ar to starpība ir pāra skaitlis. Pieskaitot 1, iegūstam nepāra skaitli a. Ja $k-1=0$, t.i. $k=1$, tad $n^{k-1} = n^0 = 1$. Ja n ir nepāra, tad pamatojam kā iepriekš. Ja n ir pāra, tad iegūstam, ka atrisinājums ir $a = 1-n+1$, pāra skaitlis.
Tātad pakāpi n^k iespējams izteikt kā n pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu tad, ja $k > 1$ vai arī, ja $k = 1$ un n ir nepāra. Atlikušajā gadījumā ($k = 1$, n pāra) tas nav iespējams.

10. Pierādīt, ka vienādojumam $4x^2 - 5y^2 = 12$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 5.

Atrisinājums:
12 dalot ar 5, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $5y^2$ dalās ar 5, apskatām iespējamos $4x^2$ atlikumus. Ja x atlikums ir 0,1,2,3 vai 4, tad $4x^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 4, 1, 1, 4. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 5 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

11. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir izmantoti tieši 2 dažādi cipari?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka meklētais četrciparu skaitlis sastāv no cipariem a un b, kur a ir pirmais cipars četrciparu skaitlī. Ciparu a mēs varam izvēlēties 9 variantos (1-9), savukārt b varēsim izvēlēties 9 variantos (visi 10 cipari, izņemot jau 1. pozīcijā izvēlēto). Tātad $9 \cdot 9 = 81$ varianti. Apskatīsim, cik variantos varēsim izveidot četrciparu skaitli no izvēlētajiem cipariem a un b. Pirmajā pozīcijā varēs būt tikai a, savukārt nākamajās trijās pozīcijās a vai b - kopā $2 \cdot 2 \cdot 2$ varianti. Jāņem vērā, ka šie varianti iekļauj arī skaitli $aaaa$, kurš neatbilst nosacījumiem. Tātad četrciparu skaitli no diviem dažādiem cipariem varam izveidot $9 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 1) = 567$ veidos.

12. Martinam Gārdneram oktobrī atzīmēja 100. gadadienu. $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$. Vai vienādība $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ ir patiesa visiem naturāliem n?

Atrisinājums:
Atrisinājumam izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Ar A(k) apzīmēsim vienādību

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2.$$

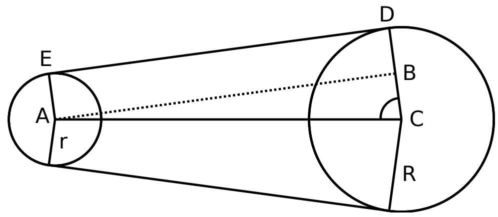
Indukcijas bāze. $A(1)$ ir patiess, jo $1^3 = 1 = 1^2$.
Induktīvā pāreja. Pārliecināsimies, ka $A(k + 1)$ ir patiess, ja $A(k)$ ir patiess.
Risinājumā izmantosim vienādību $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

$$\begin{aligned}
&(1+2+\ldots+k+(k+1))^2 = ((1+2+\ldots+k)+(k+1))^2 = \\
&= (1+2+\ldots+k)^2 + 2(1+2+\ldots+k)(k+1) + (k+1)^2 = \\
&= (1+2+\ldots+k)^2 + 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+1) + (k+1)^2 = \\
&= (1+2+\ldots+k)^2 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 = \\
&= (1+2+\ldots+k)^2 + (k+1)^3 = \\
&= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3, \text{ k.b.j.}
\end{aligned}$$

13. BMX velosipēda priekšējam zobratam ir 44 zobi, aizmugurējam 16. Attālums starp zobratu asīm (centriem) ir 13 collas. Ķēdei katrs posms ir 1/2 collu garš. Cik posmu garu ķēdi vajag, lai tā būtu precīzi nospriegota?

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cos(α)	1	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.500	0.342	0.174	0
sin(α)	0	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985	1

Atrisinājums:



Katrs zobs atbilst vienam ķēdes posmam, tātad zobratu apkārtmēri ir attiecīgi 22" un 8", un to rādiusi $R = 11/\pi$ un $r = 4/\pi$. ED ir pieskare abām riņķa līnijām, tādēļ rādiusi AE un DC ir tai perpendikulāri. Novelkam AB paralēlu ED, iegūstot taisnstūri $ABDE$. ΔABC ir taisnleņķa, ar hipotenūzu AC garumā 13". Katete BC ir garumā $R - r = 7/\pi \approx 2.23$. Sauksim $\angle ACB$ par α. Tad $\cos(\alpha) = BC/AC \approx 0.17$, un no tabulas nolasām, ka $\alpha \approx 80°$. Seko, ka $ED = AB = AC \cdot \sin(\alpha) \approx 12.8$. Atliek izrēķināt ķēdes ārējo loku garumus. Tā kā to leņķiskie izmēri ir 200° un 160°, iegūstam $22 \cdot 200°/360° = 12.2$ un $8 \cdot 200°/360° = 3.6$. Tātad ķēdes kopējais garums ir vismaz $2 \cdot 12.8 + 12.2 + 3.6 = 41.4$ collas. Tā kā katra posma garums ir 0.5 collas, vajadzēs 83 posmus.

14. Par *Fermā* skaitļiem sauksim visus skaitļus, kurus var uzrakstīt formā $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, kur n ir nenegatīvs vesels skaitlis. Pierādiet, ka, sākot ar $n \geq 2$, visiem Fermā skaitļiem pēdējais cipars ir 7.

Atrisinājums:
Vispirms atradīsim sakarību starp F_{n+1} un F_n. Ievērojam, ka $(2^{(2^n)})^2 = 2^{(2^{n+1})}$. Atliek tikai tikt galā ar $+1$ daļu, un mēs iegūstam $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. Tagad izmantosim indukcijas principu *Indukcijas bāze.* F_2 īpašība izpildās, jo $2^{(2^2)} + 1 = 17$. *Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka F_{n+1} īpašība izpildās, ja F_n tā izpildās. Zinot, ka F_n pēdējais cipars ir 7, iegūstam, ka $(F_n - 1)$ pēdējais cipars ir 6 un $(F_n - 1)^2$ arī ir 6, un galu galā $(F_n - 1)^2 + 1$ pēdējais cipars ir 7. Tagad, izmantojot iepriekš iegūto sakarību $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$, secinām, ka arī F_{n+1} pēdējais cipars ir 7, k.b.j.
Piebilde. Iespējams risinājums arī ievērojot, ka $2^{2^n} = 2^{4k} = 16^k$, kur $k = 2^{n-2}$ (vesels skaitlis, ja $n \geq 2$). Jebkurai 16 pakāpei pēdējais cipars ir 6 (vienkārša indukcija). Pieskaitot 1, iegūstam pēdējo ciparu 7.

15. Mājai ir vienas ārdurvis, un tās istabas ir savienotas ar durvīm. Visās istabās iespējams nokļūt, bet nav iespējams iziet pa apli - pa kurām durvīm ieiet, pa tām pēc tam būs jānāk atpakaļ. Pierādīt, ka durvju skaits ir vienāds ar istabu skaitu.

Atrisinājums:
Pierādīsim ar matemātisko indukciju, ka visiem n izpildās: mājai ar n istabām arī durvju skaits ir n. *Indukcijas bāze:* ja mājā ir tikai viena istaba $n = 1$, tad arī durvju skaits ir $n = 1$ (tikai ārdurvis). *Induktīvā pāreja:* pieņemam, ka īpašība izpildās kādam $n \geq 1$ un apskatām māju ar $n + 1$ istabu. Iesim mājā iekšā, un turpināsim iet visu laiku cauri jaunām durvīm, kamēr tas vairs nav iespējams. Nevar gadīties, ka esam atgriezušies istabā, kurā jau bijām, jo uzdevumā dots, ka pa apli iziet nav iespējams. Tātad esam nonākuši istabā, kurai ir tikai vienas durvis. Ja mēs šo istabu nojauktu un tās durvis aizmūrētu, tad paliktu māja ar n istabām, kura joprojām atbilstu uzdevuma aprakstam. Tātad pēc indukcijas pieņēmuma tajā ir n durvis. Attiecīgi, pieskaitot pēdējo istabu ar vienām durvīm, esam pierādījuši, ka arī $n + 1$ istabu mājai ir $n + 1$ durvis, un induktīvais pierādījums ir pabeigts.
Piebilde. Ja apzīmējam istabas ar punktiem (virsotnēm) un durvis ar līnijām (šķautnēm), kas tos savieno, iegūstam grafu. Grafu teorijā šādu savienotu grafu bez cikliem sauc par koku. Ja neskaitām ārdurvis (kurām otrā pusē nav istaba), tad esam pierādījuši, ka kokam ar n virsotnēm ir $n - 1$ šķautne.