atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. *Crémant* šokolādes tāfelītē 48% no svara ir kakao un 20% - rieksti. Cik procentu kakao ir šokolādes masā (neskaitot riekstus)?

   Atrisinājums:
   Neskaitot riekstus, 80% no tāfelītes svara ir šokolādes masa. Tātad, šajā šokolādes masā $0.48/0.80 = 0.60$ jeb 60% ir kakao.

2. Daniels šodien apēda 4 šokolādes tāfelītes (katra tāfelīte satur 5 ēdamkarotes cukura), 3 lielos šokolādes batoniņus (8 ēdamkarotes cukura katrs) un izdzēra 1 litru kolas (9 ēdamkarotes cukura). Artūrs vēlas uzņemt tieši tādu pašu cukura daudzumu kā Daniels, taču citā kombinācijā. Turklāt Artūrs vēlas nogaršot katru no produktiem, un tie ir jāpatērē veselās vienībās (tāfelīte, batons vai litrs). Vai Artūrs to var izdarīt?

   Atrisinājums:
   Ievērosim, ka, samazinot patērēto tafelīšu skaitu par vienu un palielinot kolu skaitu par vienu, kopējais uzņemtais cukura daudzums palielināsies par 4 ēdamkarotēm. Tātad, apēdot par divām tāfelītēm mazāk, bet izdzerot par divām kolām vairāk, mēs varēsim aizstāt vienu šokolādes batoniņu, kurā ir 8 ēdamkarotes cukura, nesamazinot kopējo uzņemto cukura daudzumu ($-2 \cdot 5 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 = 0$). Attiecīgi Artūrs varēs uzņemt tieši tādu pašu cukura daudzumu kā Daniels, piemēram, patērējot 2 šokolādes tāfelītes, 2 lielos šokolādes batoniņus un 3 litrus kolas.

3. Rinalds no Siguldas veda dēlu uz slimnīcu Rīgā, braucot ar ātrumu 95 km/h. Pie Vangažiem ir aptuveni 1 km garš posms, kurā ātruma ierobežojums ir 70 km/h. Rinalds nolēma ierobežojumu neievērot, un viņu apstādināja policija. Palīdzi Rinaldam pamatot savu lēmumu nesamazināt ātrumu. Cik daudz laika Rinalds ietaupītu, nesamazinot ātrumu līdz 70 km/h?

   Atrisinājums:
   Ar ātrumu 95 km/h Rinalds 1 km garo posmu nobrauktu $\frac{1}{95}$ stundas jeb $\frac{1}{95} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ar ātrumu 70 km/h - $\frac{1}{70} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ietaupījums ir $(\frac{1}{70} - \frac{1}{95}) \cdot 60 \cdot 60 \approx 13.5$ sekundes.

4. Olga uz nedēļu viesojas Latvijā un vēlas lietot mobilo internetu. Plāns *A* maksā 0.075 €/MB, bet plāns *B* maksā 5€ un ietver līdz 500MB. Kurš plāns ir izdevīgāks? No kā tas ir atkarīgs?

   Atrisinājums:
   Lietojot plānu *A* mēs par 5€ varētu izmantot $5/0.075 = 5000/75 = 200/3 \approx 66.7$MB datu. Tātad, ja plānots izmantot mazāk par šo apjomu, tad plāns *A* būs izdevīgāks, bet ja vairāk - tad plāns *B* (cerēsim, ka Olgai pietiks ar 500MB).

5. Milo piegādā olas armijai par 5 centiem gabalā. Viņš tās iepērk no "cilvēkiem" Milānā par 7 centiem, lai gan iepriekš tās viņiem pārdevis par 4.25 centiem gab. Kāda ir Milo peļņa par katru olu, ja viņš sākotnēji tās iepērk Sicīlijā par 1 centu gab., un "cilvēki" Milānā ir viņš pats?

   Atrisinājums:
   Pavisam vienkārši rēķinot, varam no 5 centiem, ko samaksā armija, atņemt 1 centu sākotnējās izmaksas. Tātad peļņa ir 4 centi par olu.
   Varam arī sadalīt pa soļiem: Peļņa no pārdošanas "cilvēkiem" Milānā ir $4.25 - 1 = 3.25$ centi par olu. Tad viņš zaudē 2 centus, jo armija samaksā tikai 5¢, bet "cilvēkiem" Milānā samaksāti 7¢. Taču jāatceras, ka "cilvēki" Milānā ir viņš pats un tie nopelnīja $7 - 4.25 = 2.75$ centus. Kopumā sanāk $3.25 + 2.75 - 2 = 4$ centi, kā arī būtu jābūt.

Uzdevuma stāsts ņemts no Joseph Heller grāmatas "Catch-22". Milo olas Milānā "pirka" par 7 centiem, lai sajauktu konkurentiem prātu (un nestāstītu, kur tās patiesībā dabū).

6. Andis un Edgars ir ieradušies uz ikgadējo talku. Viņu uzdevums ir pa vienai pārnest uz citu vietu 16 lielas un 10 mazas kastes. Tabulā norādīts, cik laika katram no puišiem vajag, lai pārvietotu katra veida kasti. Kāds ir ātrākais laiks, kurā Andis un Edgars var pabeigt viņiem uzticēto uzdevumu?

	Andis	Edgars
Lielā kaste	6 minūtes	5 minūtes
Mazā kaste	2 minūtes	3 minūtes

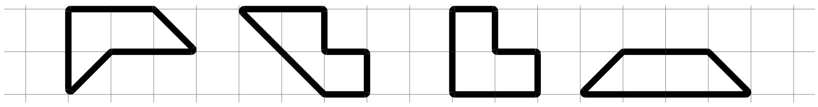
Atrisinājums:
Andis ātrāk nes mazās kastes, bet Edgars - lielās. Ja Andis aiznesīs visas mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $10 \cdot 2 = 20$min, Edgars tikmēr aiznesīs 4 lielās kastes. Vēl atliek 12 lielās kastes, no kurām nākamajās 30 minūtēs E aiznesīs 6, bet A 5. Pēdējo kasti aiznes Edgars, un šajā variantā kopumā paiet 55 minūtes.

Ja Andis aiznes 9 mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $9 \cdot 2 = 18$min, Edgars tikmēr aiznesīs vienu mazo un 3 lielās kastes ($1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 18$). Atliek 13 lielās kastes, no kurām E 35min aiznesīs 7 un A 36min aiznesīs 6. Šajā variantā kopumā paiet 54 minūtes. Šis arī ir labākais risinājums - jo, palielinot mazo kastu skaitu, ko nes Edgars, viņam būtu jāsamazina lielo kastu skaits (lai iegūtu mazāku laiku nekā 54min), tātad Andis nestu vairāk lielās. Pašreizējā risinājumā Anda un Edgara nešanas laiku summa ir $53 + 54 = 107$. Katra papildu mazā kaste, ko nestu Edgars nevis Andis, palielinātu šo summu par 1, tāpat arī katra papildu lielā kaste, ko nestu Andis nevis Edgars. Tātad kopsumma būtu vismaz 109, līdz ar to lielākais starp Edgara un Anda laikiem būtu vismaz $109/2 > 54$min.

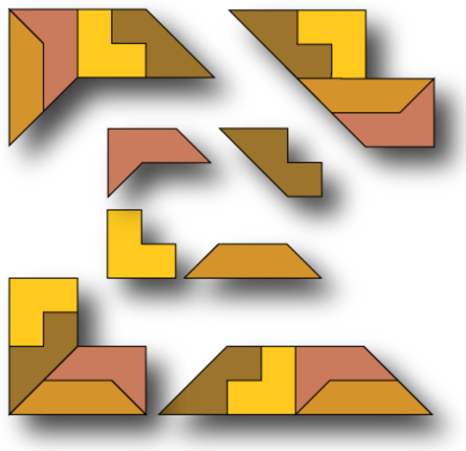
7. Cementa ražotāja SIA «Cemex» realizējusi pilotprojektu, kaļķakmens karjerā «Kūmas» uzbūvējot 500 metrus garu ceļa posmu no valčbetona, un ir gatava sadarboties ar ceļu būves uzņēmumiem un VAS «Latvijas Valsts ceļi» šādu ceļu būvniecībā Latvijā. «Cemex» valdes loceklis Ēriks Maikls Trusevics stāstīja, ka betona ceļu izmaksas ir par aptuveni 20% lētākas nekā asfalta ceļu izmaksas, piemēram, šī eksperimentālā ceļa izmaksas bija 45 eiro par kvadrātmetru. Cik izmaksāja šis ceļš? Izskaidro pieņēmumus! Cik izmaksātu šāds asfalta ceļš?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ceļš ir divjoslu ar joslas platumu 4 metri. Kopējais platums tad ir 8 metri. Tika uzbūvēti $500 \cdot 8 = 4000$ m^2 ceļa, kas izmaksāja $45 \cdot 4000 = 180'000$ eiro. Tā kā betona ceļa izmaksas ir par 20% mazākas nekā asfalta, tās sastāda 80% no asfalta izmaksām (pieņemot, ka asfalta risinājumā nemainās ceļa platums). Asfalta ceļš attiecīgi maksātu $180'000/0.8 = 225'000$ eiro.

8. Izmantojot visas četras zemāk dotās figūras, katru vienu reizi, izveido figūru, kurai ir tādi pati forma kā kādai no dotajām. Ja vari, uzrādi, kā izveidot visas četras! Figūras drīkst rotēt un apgriezt otrādi.



Atrisinājums:



Šo un citus piemērus var atrast `wikipedia.org/wiki/Self-tiling_tile_set`.

9. Ražojot cementu, tiek izmantoti vairāki materiāli (to proporcijas cementā skat. zemāk). Kvalitātes departamenta vadītāja Eva vēlējās atbrīvoties no ražošanas blakus produkta - ķīmiskiem putekļiem (BPD), pievienojot to cementam. Diemžēl BPD ir augsts hlora saturs - 11.3614%, tādēļ to var pievienot tikai ierobežotā daudzumā. Kāds ir maksimālais daudzums BPD (procentos no jauniegūtā cementa), ko Eva varētu pievienot cementam, ja atļautais hlora daudzums cementā ir 0.0085% un pārējo materiālu hlora saturs ir norādīts tabulā?

Materiāls	Proporcija cementā	Hlora saturs
Klinkers	80.0%	0.0009%
Ģipšakmens	5.0%	-
Šlaga	5.0%	0.0005%
Kaļķakmens	10.0%	0.0065%

Atrisinājums:
Vienkāršības labad hlora saturu katrā no materiāliem izteiksim miljonajās daļās (ppm). No tabulā dotās informācijas iegūstam, ka normālā cementā hlora saturs ir 13.95 ppm. Ar $x \in [0; 1]$ apzīmēsim maksimālo BPD proporciju jaunajā cementā. Tad

$$\begin{aligned} 13.95(1-x) + 113614x &= 85 \\ 13.95 - 13.95x + 113614x &= 85 \\ 113600.05x &= 71.05 \\ x &\approx 0.000625 \end{aligned}$$

Tātad maksimāli varēs pievienot aptuveni 0.0625% BPD no kopējā jaunā cementa daudzuma.

10. Sanāksmē piedalās 27 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Cik ilgi var notikt sanāksme, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 24 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad, precīzi rīkojoties, vajadzētu izdoties 27 dalībnieku datorus uzturēt ieslēgtus uz neierobežotu laiku. To varētu panākt, pirmo pusstundu lādējot 1., 2., 3. datoru, otro pusstundu lādējot 4., 5., 6. datoru, ... , sākoties devītajai pusstundai jeb tieši pēc 4 stundām sākot lādēt 25., 26., 27. datoru (tieši pirms tie izlādētos). Pēc tam, desmitajā pusstundā atkal 1., 2., 3. (arī tieši pirms to izlādēšanās) un tālāk turpināt šo 4.5 stundas garo ciklu.

11. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā ($2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2$). Atbilde ir cipars "4".

12. Pierādiet, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8.

Atrisinājums:
Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m+1$ un $2n+1$ (m,n - naturāli). To kvadrātu starpība ir $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = ((2m+1)-(2n+1))((2m+1)+(2n+1)) = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs - nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.

13. Dotas monētas ar 1, 2, 5, 10 un 20 centu nomināliem. Katram skaitlim k ar M_k apzīmēsim mazāko monētu skaitu, kurš nepieciešams, lai samaksātu k centus. Kurš no skaitļiem
$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2014}, M_{2015}$ ir lielākais?

Atrisinājums:
Sākumā ievērosim, ka skaitā M_k nevar būt iekļautas varāk nekā viena 10, viena 5 un viena 1 centa monēta, jo, ja būtu vismaz divas šādas monētas, tad kopējo monētu skaitu noteikti varētu samazināt, aizvietojot divas no šīm monētām ar vienu 20, 10 vai 2 centu monētu, attiecīgi. Līdzīgi mēs varam secināt, ka nebūs vairāk par divām 2 centu monētām, jo trīs 2 centu monētas varētu aizstāt ar vienu 5 centu monētu un vienu 1 centa monētu, tādējādi samazinot kopējo monētu skaitu. Arī 1 centa monēta nevarēs būt kopā ar divām 2 centu monētām, jo tad šīs trīs monētas varēs aizvietot ar vienu 5 centu monētu. Tātad lielākais monētu skaits no šiem nomināliem ir 4 monētas.
Uz 20 centu monētām šāds limits neattiecas, tādēļ vislielākais M_k būs tam skaitlim k, kuram nepieciešams vislielākais 20 centu monētu skaits. Šis skaits nevar būt lielāks par $2015/20 = 100$ (atl. 15). No pārējām monētām mēs varam pievienot ne vairāk kā 4 monētas. Tās pievienojot, iegūtais skaitlis nebūs mazāks par $20 \cdot 100 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2018$. Tātad monētu skaits 104 vai vairāk nav iespējams. Turpretim varam aprēķināt, ka $M_{1998} = M_{1999} = M_{2008} = M_{2009} = M_{2013} = M_{2014} = 103$. Šie arī ir lielākie no skaitļiem M_k, $k \leq 2015$.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 1/2$, tātad $a+1 \geq b$. Secinām, ka $a+1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības ($1 \times 1 \times 1$) kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2, 2, 2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ vai $(2, 2, 1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1, 1, 2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3, 3, 2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2, 1, 2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3, 1, 2)$, vai $(2, 3, 2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.