atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. *Crémant* šokolādes tāfelītē 48% no svara ir kakao un 20% - rieksti. Cik procentu kakao ir šokolādes masā (neskaitot riekstus)?

Atrisinājums:
Neskaitot riekstus, 80% no tāfelītes svara ir šokolādes masa. Tātad, šajā šokolādes masā $0.48/0.80 = 0.60$ jeb 60% ir kakao.

2. Rinalds no Siguldas veda dēlu uz slimnīcu Rīgā, braucot ar ātrumu 95 km/h. Pie Vangažiem ir aptuveni 1 km garš posms, kurā ātruma ierobežojums ir 70 km/h. Rinalds nolēma ierobežojumu neievērot, un viņu apstādināja policija. Palīdzi Rinaldam pamatot savu lēmumu nesamazināt ātrumu. Cik daudz laika Rinalds ietaupītu, nesamazinot ātrumu līdz 70 km/h?

Atrisinājums:
Ar ātrumu 95 km/h Rinalds 1 km garo posmu nobrauktu $\frac{1}{95}$ stundas jeb $\frac{1}{95} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ar ātrumu 70 km/h - $\frac{1}{70} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ietaupījums ir $(\frac{1}{70} - \frac{1}{95}) \cdot 60 \cdot 60 \approx 13.5$ sekundes.

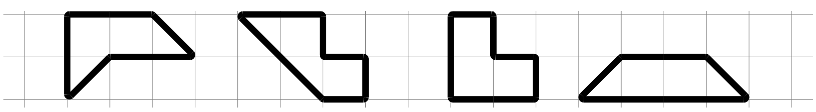
3. Olga uz nedēļu viesojas Latvijā un vēlas lietot mobilo internetu. Plāns *A* maksā 0.075 €/MB, bet plāns *B* maksā 5€ un ietver līdz 500MB. Kurš plāns ir izdevīgāks? No kā tas ir atkarīgs?

Atrisinājums:
Lietojot plānu *A* mēs par 5€ varētu izmantot $5/0.075 = 5000/75 = 200/3 \approx 66.7$MB datu. Tātad, ja plānots izmantot mazāk par šo apjomu, tad plāns *A* būs izdevīgāks, bet ja vairāk - tad plāns *B* (cerēsim, ka Olgai pietiks ar 500MB).

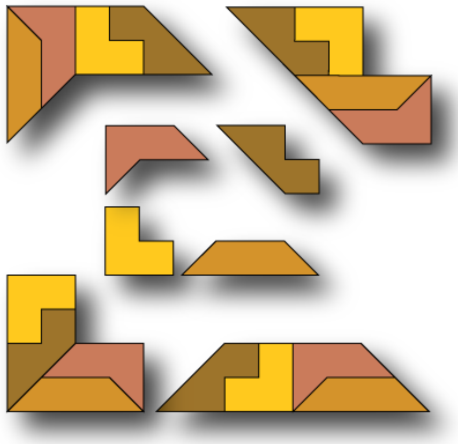
4. Milo piegādā olas armijai par 5 centiem gabalā. Viņš tās iepērk no "cilvēkiem" Milānā par 7 centiem, lai gan iepriekš tās viņiem pārdevis par 4.25 centiem gab. Kāda ir Milo peļņa par katru olu, ja viņš sākotnēji tās iepērk Sicīlijā par 1 centu gab., un "cilvēki" Milānā ir viņš pats?

Atrisinājums:
Pavisam vienkārši rēķinot, varam no 5 centiem, ko samaksā armija, atņemt 1 centu sākotnējās izmaksas. Tātad peļņa ir 4 centi par olu.
Varam arī sadalīt pa soļiem: Peļņa no pārdošanas "cilvēkiem" Milānā ir $4.25 - 1 = 3.25$ centi par olu. Tad viņš zaudē 2 centus, jo armija samaksā tikai 5¢, bet "cilvēkiem" Milānā samaksāti 7¢. Taču jāatceras, ka "cilvēki" Milānā ir viņš pats un tie nopelnīja $7 - 4.25 = 2.75$ centus. Kopumā sanāk $3.25 + 2.75 - 2 = 4$ centi, kā arī būtu jābūt.
Uzdevuma stāsts ņemts no Joseph Heller grāmatas "Catch-22". Milo olas Milānā "pirka" par 7 centiem, lai sajauktu konkurentiem prātu (un nestāstītu, kur tās patiesībā dabū).

5. Izmantojot visas četras zemāk dotās figūras, katru vienu reizi, izveido figūru, kurai ir tādi pati forma kā kādai no dotajām. Ja vari, uzrādi, kā izveidot visas četras! Figūras drīkst rotēt un apgriezt otrādi.

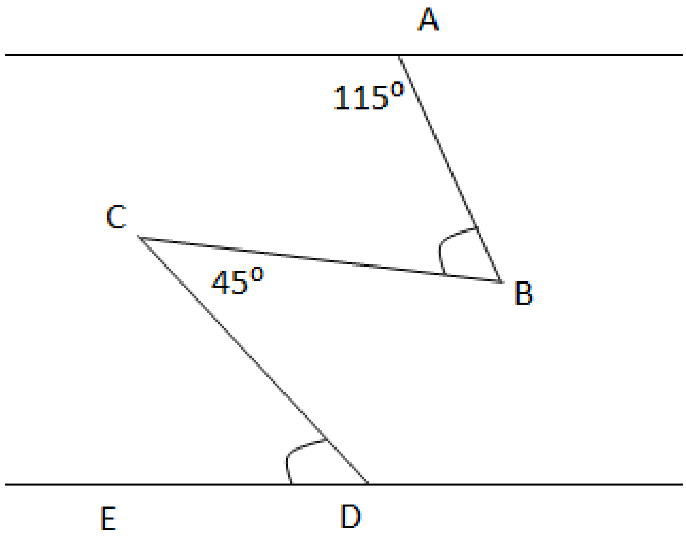


Atrisinājums:

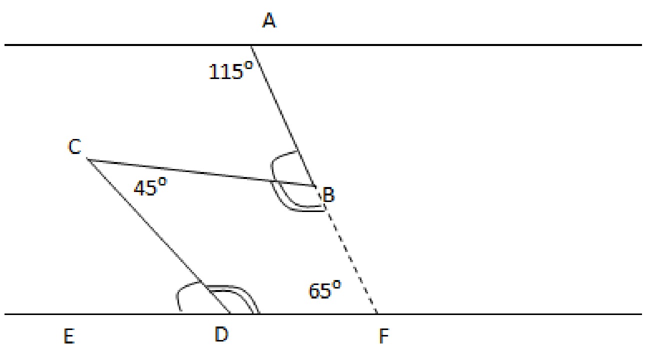


Šo un citus piemērus var atrast `wikipedia.org/wiki/Self-tiling_tile_set`.

6. Andis un Zane upi ar paralēliem krastiem šķērsoja pa maršutu kā parādīts zīmējumā. Nosakiet leņķi ABC, ja zināms, ka leņķi ABC un CDE ir savstarpēji vienādi.



Atrisinājums:
Pagarinām taisni AB un iegūstam $\angle AFE$, kurš ir iekšējs vienpusleņķis ar leņķi A. Tātad $\angle AFE = 180° - \angle A = 65°$. Tā kā $\angle ABC = \angle CDE$, tad arī šo leņķu blakusleņķi ir vienādi, $\angle CBF = \angle CDF$. Varam aprēķināt $\angle CBF$, izmantojot, ka kvadrāta CBFD leņķu summa ir 360°. $\angle CBF = \frac{360° - \angle DCB - \angle AFE}{2} = \frac{250°}{2} = 125°$. Attiecīgi $\angle ABC = 180° - 125° = 55°$.



7. Pierādiet, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8.

Atrisinājums:
Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m + 1$ un $2n + 1$ (m,n - naturāli). To kvadrātu starpība ir $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = ((2m+1) - (2n+1))((2m+1) + (2n+1)) = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs - nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.

8. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, bet $0! = 1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, tad $\overline{abc} = 123$.

Atrisinājums:
$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

9. Ražojot cementu, tiek izmantoti vairāki materiāli (to proporcijas cementā skat. zemāk). Kvalitātes departamenta vadītāja Eva vēlējās atbrīvoties no ražošanas blakus produkta - ķīmiskiem putekļiem (BPD), pievienojot to cementam. Diemžēl BPD ir augsts hlora saturs - 11.3614%, tādēļ to var pievienot tikai ierobežotā daudzumā. Kāds ir maksimālais daudzums BPD (procentos no jauniegūtā cementa), ko Eva varētu pievienot cementam, ja atļautais hlora daudzums cementā ir 0.0085% un pārējo materiālu hlora saturs ir norādīts tabulā?

Materiāls	Proporcija cementā	Hlora saturs
Klinkers	80.0%	0.0009%
Ģipšakmens	5.0%	-
Šlaga	5.0%	0.0005%
Kaļķakmens	10.0%	0.0065%

Atrisinājums:
Vienkāršības labad hlora saturu katrā no materiāliem izteiksim miljonajās daļās (ppm). No tabulā dotās informācijas iegūstam, ka normālā cementā hlora saturs ir 13.95 ppm. Ar $x \in [0; 1]$ apzīmēsim maksimālo BPD proporciju jaunajā cementā. Tad

$$\begin{aligned} 13.95(1-x) + 113614x &= 85 \\ 13.95 - 13.95x + 113614x &= 85 \\ 113600.05x &= 71.05 \\ x &\approx 0.000625 \end{aligned}$$

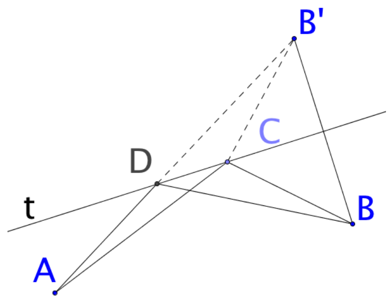
Tātad maksimāli varēs pievienot aptuveni 0.0625% BPD no kopējā jaunā cementa daudzuma.

10. Sanāksmē piedalās 27 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Cik ilgi var notikt sanāksme, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 24 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad, precīzi rīkojoties, vajadzētu izdoties 27 dalībnieku datorus uzturēt ieslēgtus uz neierobežotu laiku. To varētu panākt, pirmo pusstundu lādējot 1., 2., 3. datoru, otro pusstundu lādējot 4., 5., 6. datoru, ... , sākoties devītajai pusstundai jeb tieši pēc 4 stundām sākot lādēt 25., 26., 27. datoru (tieši pirms tie izlādētos). Pēc tam, desmitajā pusstundā atkal 1., 2., 3. (arī tieši pirms to izlādēšanās) un tālāk turpināt šo 4.5 stundas garo ciklu.

11. Dota taisne t, kas plakni sadala divās daļās, un divi punkti, kas abi atrodas vienā plaknes daļā un neatrodas uz taisnes t. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu arī kādu taisnes t punktu.

Atrisinājums:
Apskatām punktus A un B, kā arī B', kas ir simetrisks punktam B pret doto taisni t. Zināms, ka īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis. Apskatīsim ceļu caur brīvi izvēlētu punktu C uz taisnes t. Pēc simetrijas redzams, ka $AC + CB = AC + CB'$. Ja C nesakrīt ar D (AB' krustpunkts ar taisni t), tad pēc trijstūra nevienādības redzams, ka $AC + CB = AC + CB' > AB' = AD + DB' = AD + DB$. Tātad īsākais uzdevumā prasītais ceļš ir $AD + DB$.



12. Dotas monētas ar 1, 2, 5, 10 un 20 centu nomināliem. Katram skaitlim k ar M_k apzīmēsim mazāko monētu skaitu, kurš nepieciešams, lai samaksātu k centus. Kurš no skaitļiem $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2014}, M_{2015}$ ir lielākais?

Atrisinājums:
Sākumā ievērosim, ka skaitā M_k nevar būt iekļautas varāk nekā viena 10, viena 5 un viena 1 centa monēta, jo, ja būtu vismaz divas šādas monētas, tad kopējo monētu skaitu noteikti varētu samazināt, aizvietojot divas no šīm monētām ar vienu 20, 10 vai 2 centu monētu, attiecīgi. Līdzīgi mēs varam secināt, ka nebūs vairāk par divām 2 centu monētām, jo trīs 2 centu monētas varētu aizstāt ar vienu 5 centu monētu un vienu 1 centa monētu, tādējādi samazinot kopējo monētu skaitu. Arī 1 centa monēta nevarēs būt kopā ar divām 2 centu monētām, jo tad šīs trīs monētas varēs aizvietot ar vienu 5 centu monētu. Tātad lielākais monētu skaits no šiem nomināliem ir 4 monētas.
Uz 20 centu monētām šāds limits neattiecas, tādēļ vislielākais M_k būs tam skaitlim k, kuram nepieciešams vislielākais 20 centu monētu skaits. Šis skaits nevar būt lielāks par $2015/20 = 100$ (atl. 15). No pārējām monētām mēs varam pievienot ne vairāk kā 4 monētas. Tās pievienojot, iegūtais skaitlis nebūs mazāks par $20 \cdot 100 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2018$. Tātad monētu skaits 104 vai vairāk nav iespējams. Turpretim varam aprēķināt, ka $M_{1998} = M_{1999} = M_{2008} = M_{2009} = M_{2013} = M_{2014} = 103$. Šie arī ir lielākie no skaitļiem M_k, $k \leq 2015$.

13. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy + y^2 = 8$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $3xy$ dalās ar 3, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2 - 2xy + y^2$, ko var izteikt kā $(x - y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x - y)$ atlikums var būt 0, 1 vai 2, tad $(x - y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 3.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:

Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 1/2$, tātad $a+1 \geq b$. Secinām, ka $a+1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:

Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2,2,2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1,1,1)$, $(2,1,1)$ vai $(2,2,1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1,1,2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3,3,2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2,1,2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3,1,2)$, vai $(2,3,2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.