atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilkts no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?

Atrisinājums:
Aprēķināsim kopējās izmaksas pirmo divu gadu laikā (24 mēneši). Ar *Cablecom*: $49+29\cdot 24 = 745$. Ar *Salt*: $1+35\cdot 24-100 = 741$. Tātad *Salt* ir nedaudz izdevīgāks. (Tā kā procentu likmes šobrīd ir tuvu nullei, naudas plūsmas diskontēšanu neveicam.) Var rēķināt arī netieši, balsoties uz starpībām: *Cablecom*$-$*Salt*$= 49-(1-100)+24\cdot(29-35) = 148-144 = 4$.

2. Andis un Edgars ir ieradušies uz ikgadējo talku. Viņu uzdevums ir pa vienai pārnest uz citu vietu 16 lielas un 10 mazas kastes. Tabulā norādīts, cik laika katram no puišiem vajag, lai pārvietotu katra veida kasti. Kāds ir ātrākais laiks, kurā Andis un Edgars var pabeigt viņiem uzticēto uzdevumu?

	Andis	Edgars
Lielā kaste	6 minūtes	5 minūtes
Mazā kaste	2 minūtes	3 minūtes

Atrisinājums:
Andis ātrāk nes mazās kastes, bet Edgars - lielās. Ja Andis aiznesīs visas mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $10\cdot 2 = 20$min, Edgars tikmēr aiznesīs 4 lielās kastes. Vēl atliek 12 lielās kastes, no kurām nākamajās 30 minūtēs E aiznesīs 6, bet A 5. Pēdējo kasti aiznes Edgars, un šajā variantā kopumā paiet 55 minūtes.

Ja Andis aiznes 9 mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $9\cdot 2 = 18$min, Edgars tikmēr aiznesīs vienu mazo un 3 lielās kastes ($1\cdot 3+3\cdot 5 = 18$). Atliek 13 lielās kastes, no kurām E 35min aiznesīs 7 un A 36min aiznesīs 6. Šajā variantā kopumā paiet 54 minūtes. Šis arī ir labākais risinājums - jo, palielinot mazo kastu skaitu, ko nes Edgars, viņam būtu jāsamazina lielo kastu skaits (lai iegūtu mazāku laiku nekā 54min), tātad Andis nestu vairāk lielās. Pašreizējā risinājumā Anda un Edgara nešanas laiku summa ir $53+54 = 107$. Katra papildu mazā kaste, ko nestu Edgars nevis Andis, palielinātu šo summu par 1, tāpat arī katra papildu lielā kaste, ko nestu Andis nevis Edgars. Tātad kopsumma būtu vismaz 109, līdz ar to lielākais starp Edgara un Anda laikiem būtu vismaz $109/2 > 54$min.

3. Edgars izveidoja 100m garu velotrasi mežā un vēlējās to noklāt ar šķembām, lai neveidotos dubļi. Cik kubikmetru šķembu vajadzētu iegādāties? Veikt un izskaidrot nepieciešamos pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka trase ir 50cm plata un vēlamies to noklāt 10cm dziļā kārtā. Pārveidojot vienības metros, iegūstam, ka nepieciešami $100\cdot 0.5\cdot 0.1 = 5$ m^3 šķembu.

4. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc} = a!+b!+c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, bet $0! = 1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, tad $\overline{abc} = 123$.

Atrisinājums:
$a = 1,\ b = 4,\ c = 5.$

5. *Rīgas Satiksme* ir izsludinājusi iepirkumu 20 jaunu zemās grīdas tramvaju iegādei. Orientējošā iepirkuma summa ir 70 miljoni eiro. Iepirkuma procedūra paredz, ka uzvarētājam jāsaražo un jāpiegādā 15 trīs sekciju un 5 četru sekciju zemās grīdas tramvaji. Cik maksātu divu sekciju tramvajs, ja pieņem, ka sekcijas tramvaja galos ir par 125 tūkstošiem dārgākas nekā vidū?

Atrisinājums:
Apzīmēsim ar x gala sekcijas cenu, un ar y vidussekcijas cenu. Tad doto varam izteikt ar vienādībām $x = y + 0.125$ un

$$\begin{aligned} 15(2x+y)+5(2x+2y) &= 70 \\ 40x+25y &= 70 \\ 40(y+0.125)+25y &= 70 \\ 65y+5 &= 70. \end{aligned}$$

Tātad $y = 1$ un $x = 1.125$. Seko, ka divu sekciju tramvajs maksātu $2x = 2.25$ miljonus eiro.

6. Sanāksmē piedalās 30 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Vai sanāksme var ilgt divas pilnas diennaktis, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 27 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad katras 4 stundas atlikusī energija samazināsies par vismaz 3 bateriju tiesu. Ņemot vērā, ka no sākuma mums ir 30 pilnībā uzlādētas baterijas un katras 4 stundas zaudējam vismaz 3 bateriju tiesu, tad ne vēlāk kā pēc $(30/3) \cdot 4 = 40$ stundām visas baterijas būs tukšas. Tātad 2 pilnas diennaktis (48h) sanāksme nevarētu notikt.

7. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

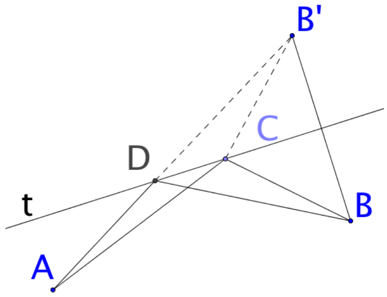
Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā ($2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2$). Atbilde ir cipars "4".

8. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.

Atrisinājums:
Skaitlim 840 ir 32 dalītāji. Dalītāju skaitu var aprēķināt, izsakot doto skaitli pirmreizinātājos. Piemēram, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tā dalītājiem ir tie paši pirmreizinātāji, iespējams, zemākās pakāpēs (arī nultajā pakāpē). Tātad dalītāju skaits ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

9. Dota taisne t, kas plakni sadala divās daļās, un divi punkti, kas abi atrodas vienā plaknes daļā un neatrodas uz taisnes t. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu arī kādu taisnes t punktu.

Atrisinājums:
Apskatām punktus A un B, kā arī B', kas ir simetrisks punktam B pret doto taisni t. Zināms, ka īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis. Apskatīsim ceļu caur brīvi izvēlētu punktu C uz taisnes t. Pēc simetrijas redzams, ka $AC + CB = AC + CB'$. Ja C nesakrīt ar D (AB' krustpunkts ar taisni t), tad pēc trijstūra nevienādības redzams, ka $AC + CB = AC + CB' > AB' = AD + DB' = AD + DB$. Tātad īsākais uzdevumā prasītais ceļš ir $AD + DB$.



10. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, ar kuru dalās jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu (kas lielāki par 9) kvadrātu starpība?

Atrisinājums:
Pierādīsim, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8. Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m+1$ un $2n+1$ (m,n - naturāli). Tad to kvadrātu starpība būs $((2m+1)^2-(2n+1)^2 = ((2m+1)-(2n+1))((2m+1)+(2n+1)) = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.
Uzrādīsim, ka ar lielāku skaitli par 8 tad jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība nedalīsies. Ievērosim, ka $15^2 - 11^2 = 104 = 8 \cdot 13$. Tātad šo skaitļu kvadrātu starpības dalītāji, kuri būs lielāki par 8, noteikti dalīsies ar 13. Lai kāds no šiem dalītājiem atbilstu uzdevuma nosacījumiem, arī pārējo nepāra skaitļa kvadrātu starpībām vajadzētu dalīties ar 13, bet $13^2 - 11^2 = 48 = 16 \cdot 3$, kas nedalās ar 13. Tātad nebūs tāda dalītajā, kas lielāks par 8, kurš dalītu jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu, kas lielāki par 9, kvadrātu starpību.

11. Kādiem veseliem skaitļiem a un b izpildās sekojošā vienādība?

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$$

Atrisinājums:
Pārveidojam sākotnējo vienādību
$b + a^2 + 1 = ab$
$b = \frac{a^2+1}{a-1} = \frac{a^2-1+2}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1} = a + 1 + \frac{2}{a-1}$
Lai b būtu vesels, 2 jādalās ar $a-1$. Vienīgie pozitīvie skaitļa 2 dalītāji ir 1 un 2, attiecīgi $a = 2$ vai $a = 3$. Aprēķinot b, skaitļu pārim (a, b) iegūstam divus vienādības atrisinājumus pozitīvos veselos skaitļos - $(2, 5)$ un $(3, 5)$. Ja apskatām arī negatīvos dalītājus -2 un -1, attiecīgi $a = -1$ vai $a = 0$. Taču tā kā izteiksme $1/a$ nav definēta, ja $a = 0$, atliek tikai viens risinājums negatīvos veselos skaitļos: $(a, b) = (-1, -1)$.

12. Ciemā vidējais rūķīša augums ir 1m. Zināms, ka, garākā rūķīša augumu dalot ar īsākā rūķīša augumu, iegūstam a. Pierādīt, ka visiem rūķīšiem augums ir intervālā $[1/a, a]$.

Atrisinājums:
Apzīmēsim īsākā rūķīša augumu ar x un garākā ar y. Skaidrs, ka $x \leq 1 \leq y$ (ja visi ir garāki vai visi ir īsāki par 1m, tad vidējais augums nevar būt 1m). No dotā $y/x = a$ seko, ka $y = ax \leq a$ un $x = y/a \geq 1/a$. Līdz ar to $1/a \leq x \leq y \leq a$, t.i. visu rūķīšu augumi ir intervālā $[1/a, a]$.

13. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy + y^2 = 8$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.
Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $3xy$ dalās ar 3, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2 - 2xy + y^2$, ko var izteikt kā $(x - y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x - y)$ atlikums var būt 0, 1 vai 2, tad $(x - y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 3.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 1/2$, tātad $a+1 \geq b$. Secinām, ka $a+1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2, 2, 2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ vai $(2, 2, 1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1, 1, 2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3, 3, 2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2, 1, 2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3, 1, 2)$, vai $(2, 3, 2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.